

Propuesta de Integrador Geométrico para Sistemas Mecánicos No Conservativos y No
Holonómicos

por

Elias Maciel



Tesis presentada como requerimiento

para obtener el grado de

Máster

en

Ciencias de la Computación

por la

Dirección de Posgrado de la Facultad Politécnica

de la

Universidad Nacional de Asunción, San Lorenzo

La Tesis de Elias Maciel, titulado Propuesta de Integrador Geométrico para Sistemas Mecánicos No Conservativos y No Holonómicos, es aprobado:

Chair _____ Fecha _____

Co-chair _____ Fecha _____

_____ Fecha _____

Universidad Nacional de Asunción, San Lorenzo

Propuesta de Integrador Geométrico para Sistemas Mecánicos No Conservativos y No
Holonómicos

Copyright 2021
por
Elias Maciel

Resumen

Propuesta de Integrador Geométrico para Sistemas Mecánicos No Conservativos y No Holonómicos

por

Elias Maciel

Máster en Ciencias de la Computación

Universidad Nacional de Asunción, San Lorenzo

Profesor Christian E. Schaerer, Chair

Profesor Inocencio Ortiz, Co-chair

Este trabajo presenta un integrador para el problema de la integración temporal de sistemas mecánicos conservativos y no conservativos, sujetos a restricciones no holonómicas, las cuales se expresan como funciones lineales o afines en las velocidades. La construcción del integrador propuesto se basa en la discretización de la formulación continua del principio variacional de Herglotz con restricciones. Esta discretización corresponde a las ecuaciones de Euler-Lagrange generalizadas discretas junto con una discretización compatible de las ecuaciones de restricción. La compatibilidad para la discretización se logra mediante la utilización del mismo mapa de discretización tanto para el lagrangiano del sistema como para las ecuaciones de restricción. La elección de este integrador variacional para la resolución del problema planteado se basa en el buen comportamiento cualitativo y cuantitativo que caracteriza a los integradores geométricos para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en contraste a integradores tradicionales de propósito general para integraciones de tiempo largo. Los resultados numéricos muestran un adecuado comportamiento cualitativo para el integrador propuesto y su capacidad de continuar con la integración del sistema para ciertas situaciones donde integradores de propósito general no pueden continuar inclusive provistos de una malla más fina.

En memoria de mis abuelos Severo Maciel y Eleuterio Recalde.
A mi padre y a mi hermano.

Índice general

Índice general	II
Índice de figuras	IV
Índice de cuadros	VI
I Fundamentos	1
1 Introducción	2
1.1. Historia y literatura	4
1.2. Objetivos de la tesis	5
1.3. Contribuciones de la tesis	5
1.4. Esquema de la tesis	5
2 Fundamento Teórico	7
2.1. Mecánica geométrica y Principios variacionales	7
2.1.1. Espacio de configuraciones: Variedades	7
2.1.2. Espacio de estados: Fibrado tangente	11
2.1.3. Restricciones: Subvariedades	14
2.1.4. Principios Variacionales	19
2.2. Integradores Geométricos	32
2.2.1. Integradores variacionales	33
II Contribuciones	42
3 Integrador de contacto con restricciones no holonómicas	43
3.1. Distribución discreta	44
3.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange discretas generalizadas con restricciones no holonómicas	44
4 Resultados	46

4.1. Péndulo de Foucault	46
4.1.1. Descripción de Lagrange-d'Alembert	46
4.1.2. Descripción de Herglotz	47
4.1.3. Análisis de resultados	48
4.2. Disco rodante que cae	49
4.2.1. Descripción de Herglotz	52
4.2.2. Análisis de resultados	53
5 Conclusiones	66
Bibliografía	68
A Integradores numéricos	72
A.0.1. Derivación de un integrador numérico	74
B Equivalencia de perspectivas del Espacio Tangente	77

Índice de figuras

2.1. Cartas coordenadas en una variedad.	8
2.2. El péndulo doble y sus variables de configuración.	11
2.3. Un toro, denominado $\mathbb{T}^2$ en topología, es el resultado del producto cartesiano de dos circunferencias, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$	11
2.4. Espacio tangente a una variedad M en un punto p	13
2.5. Péndulo doble en $\mathbb{R}^2$	16
2.6. La esfera que rueda sin deslizarse y sus variables de configuración.	18
2.7. El péndulo planar y sus variables de configuración.	22
2.8. Un perro que persigue un hombre y las variables del sistema.	27
2.9. Péndulo de Foucault y sus ejes inerciales y no inerciales.	29
2.10. Resultado en espacio de estados de los integradores Euler explícito (izq.) y Euler simpléctico (der.). Los valores q y $\dot{q}$ se refieren a la posición y a la velocidad del sistema, respectivamente. Las líneas continuas representan la trayectoria de la solución real del sistema.	37
2.11. Simulación del oscilador armónico amortiguado con un parámetro de amortiguamiento α pequeño utilizando el integrador de contacto y el integrador basado en el principio LA. En las Soluciones, el eje x representa el tiempo en segundos y el eje y representa el desplazamiento del punto de equilibrio del oscilador, h es el tamaño de paso y (p_0, q_0) representan las condiciones iniciales de momento y posición, respectivamente.	40
4.1. Experimento 1 del péndulo de Foucault, con condiciones iniciales $q(0) = (0, l/100)$, $\dot{q}(0) = (0, 0)$. Parámetro de disipación $\alpha = 1e - 3$	50
4.2. Experimento 2 del péndulo de Foucault, con condiciones iniciales $q(0) = (0, l/100)$, $\dot{q}(0) = (0, 0)$. Parámetro de disipación $\alpha = 1e - 4$	51
4.3. Disco rodante que cae y sus variables de estado.	52
4.4. Experimento 1.1 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$. Disipación $\alpha = 0$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 1/2)$	54
4.5. Experimento 1.2 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$. Disipación $\alpha = 0,005$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 1/2)$	55
4.6. Experimento 1.3 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$. Disipación $\alpha = 0,1$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 1/2)$	56

- 4.7. Experimento 2.1 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, \pi/36, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi, 0, 0, 0, 2\pi)$. Disipación $\alpha = 0$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 0)$ 57
- 4.8. Experimento 2.2 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, \pi/36, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi, 0, 0, 0, 2\pi)$. Disipación $\alpha = 0,005$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 0)$ 58
- 4.9. Experimento 2.3 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, \pi/36, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi, 0, 0, 0, 2\pi)$. Disipación $\alpha = 0,1$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 0)$ 59
- 4.10. Experimento 3.1 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi/2, 0, 0, 0, \pi)$. Disipación $\alpha = 0$ y $F(t) = (0, 0, 0, t/16, t/16)$ 60
- 4.11. Experimento 3.2 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi/2, 0, 0, 0, \pi)$. Disipación $\alpha = 0,005$ y $F(t) = (0, 0, 0, t/16, t/16)$ 61
- 4.12. Experimento 3.3 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi/2, 0, 0, 0, \pi)$. Disipación $\alpha = 0,1$ y $F(t) = (0, 0, 0, t/16, t/16)$ 62
- 4.13. Experimento 4.1 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 20\pi/180, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi/2, 0, 0, -3\pi/10, \dot{\psi}_0)$, con $\dot{\psi}_0 = ((I_T - I_A - mR^2) \sin(\theta_0) \dot{\phi}_0^2 - mgR) / ((I_A + mR^2) \tan(\theta_0) \dot{\phi}_0)$. Disipación $\alpha = 0$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 0)$ 63
- 4.14. Experimento 4.2 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 20\pi/180, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi/2, 0, 0, -3\pi/10, \dot{\psi}_0)$, con $\dot{\psi}_0 = ((I_T - I_A - mR^2) \sin(\theta_0) \dot{\phi}_0^2 - mgR) / ((I_A + mR^2) \tan(\theta_0) \dot{\phi}_0)$. Disipación $\alpha = 0,005$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 0)$ 64
- 4.15. Experimento 4.3 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 20\pi/180, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi/2, 0, 0, -3\pi/10, \dot{\psi}_0)$, con $\dot{\psi}_0 = ((I_T - I_A - mR^2) \sin(\theta_0) \dot{\phi}_0^2 - mgR) / ((I_A + mR^2) \tan(\theta_0) \dot{\phi}_0)$. Disipación $\alpha = 0,1$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 0)$ 65

Índice de cuadros

2.1. Tipos de sistemas mecánicos y correspondientes principios variacionales para obtener sus ecuaciones de movimiento.	33
---	----

Agradecimientos

Primera y principalmente a los profesores Inocencio Ortiz y Christian Schaerer, por todos los conocimientos que me transmitieron y el entrenamiento teórico y aplicado que me brindaron. Es un honor haber trabajado con ellos.

A mi familia, por el apoyo y comprensión durante este tiempo sin precedentes.

A FEEI-CONACYT-PROCIENCIA y al proyecto POSG17-62-PROCIENCIA-CONACYT por el respaldo financiero recibido.

Parte I

Fundamentos

Capítulo 1

Introducción

Although it is tacitly agreed nowadays that scientific treatises should avoid philosophical discussions, in the case of the variational principles of mechanics an exception to the rule may be tolerated, [...].

— Cornelius Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*

Los integradores geométricos son una clase de métodos numéricos cuyo enfoque principal consiste en considerar la geometría continua subyacente en sistemas de ecuaciones diferenciales en la configuración discreta para obtener los correspondientes integradores [51, 19, 13, 40]. En este trabajo centramos el estudio de dichos integradores aplicados al contexto de sistemas mecánicos, es decir, los sistemas dinámicos que se buscan resolver numéricamente corresponden a las ecuaciones de movimiento de sistemas mecánicos.

Para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales generales se cuenta con un gran conjunto de métodos de propósito general, en donde el enfoque principal para su formulación consiste en discretizar las ecuaciones diferenciales y garantizar su convergencia a la solución con herramientas de análisis numérico, sin tener en cuenta el origen o las características de dichas ecuaciones [3, 45, 7]. Este enfoque corresponde a integradores, tanto de obtención sencilla como los de Euler (explícito e implícito), o integradores más sofisticados y maduros como los basados en Runge-Kutta de alto orden. Sin embargo, estos integradores de propósito general, como no necesariamente son compatibles con la geometría continua de las ecuaciones diferenciales, pueden no resultar ser apropiados para simular sistemas mecánicos, ya que típicamente introducen artefactos numéricos espurios en la integración, como por ejemplo, amortiguamiento numérico o la introducción de fuerzas que incrementan la energía del sistema de manera espuria [34, 19, 44].

En contrapartida, los integradores geométricos son métodos competentes para la simulación de sistemas mecánicos. Precisamente, la compatibilidad de estos integradores con la geometría continua subyacente de las ecuaciones diferenciales se traduce en la preservación de ciertas simetrías e invariantes que caracterizan al sistema mecánico, produciendo integraciones de excelente comportamiento cualitativo [51, 13].

Además, en el contexto de integradores geométricos aplicados a sistemas mecánicos, existe una manera sistemática de obtener dichos esquemas numéricos. Estos corresponden a los integradores variacionales, que se basan en modelar un sistema mecánico discreto mediante la discretización de los principios de la formulación variacional de la mecánica, como el principio de Hamilton y el principio de Lagrange-d'Alembert, los cuales utilizan cálculo variacional como principal herramienta para obtener las ecuaciones de movimiento. Esto es, los integradores variacionales son discretizaciones de principios variacionales, sin considerar la discretización de las ecuaciones de movimiento [51, 9, 48].

En este punto es necesario mencionar que las ecuaciones continuas de movimiento resultantes de la aplicación de los principios variacionales son típicamente las mismas que aquellas obtenidas por las leyes de balance de Newton-Euler [6]. Son el enfoque y las herramientas para obtener dichas ecuaciones de movimiento las diferencias fundamentales entre la formulación newtoniana y la formulación variacional, ambos de la mecánica clásica, siendo la formulación variacional de la cual se basan los integradores mostrados en este trabajo. A este respecto, los integradores tradicionales se basan en discretizar las ecuaciones de movimiento específicas del sistema, expresadas por la formulación Newton-Euler, mientras que, como los integradores variacionales se basan en la discretización de principios variacionales, para estos esquemas no es necesaria la obtención de las ecuaciones del movimiento.

Sin embargo, la aplicación de los principios variacionales de la mecánica se dan en contextos bien específicos. Por ejemplo, dependiendo de las condiciones de movimiento impuestas a un sistema mecánico en su idealización matemática puede resultar en que un cierto principio variacional no pueda ser aplicable para obtener las ecuaciones de movimiento natural del sistema idealizado [6, 35, 18].

Por una parte, se debe considerar si el sistema mecánico estudiado conserva su energía en el tiempo, es decir, si es conservativo; o si se encuentra sujeto a fuerzas externas no conservativas. En el primer caso, la aplicación del principio de Hamilton resulta en las ecuaciones correctas de movimiento; mientras que en el segundo caso, el principio de Hamilton no considera las fuerzas no conservativas, y es el principio de Lagrange-d'Alembert el que resulta apropiado para dichos sistemas [51, 6].

Por otra parte, para la aplicación de principios variacionales también se debe considerar si el sistema estudiado tiene restricciones de movimiento que se escriben como función solo de las coordenadas, denominadas restricciones holonómicas; o si las restricciones se escriben además como función sobre las velocidades del sistema, denominadas restricciones *no* holonómicas. Cuando las restricciones son holonómicas, la aplicación de principios puramente variacionales resulta en las ecuaciones correctas del movimiento; mientras que su aplicación a sistemas con restricciones no holonómicas, resulta en ecuaciones que no corresponden al movimiento natural de estos sistemas [21, 42, 6]. Un ejemplo arquetípico de un sistema no holonómico consiste en el cuerpo que está restringido a moverse sobre una superficie sin deslizarse, en donde la condición de no deslizamiento se expresa como función lineal sobre las velocidades del sistema. En este caso, la aplicación del principio de Hamilton, que es puramente variacional, no resulta en las ecuaciones que corresponden al movimiento natural de este sistema [21]. Mientras que, a este tipo de sistema, es aplicable el principio de

Lagrange-d'Alembert junto con el principio no holonómico [6].

Teniendo en cuenta estas consideraciones, mostramos los integradores que se aplican a diferentes tipos de sistemas mecánicos. Además, como contribución principal de este trabajo, desarrollamos un integrador geométrico basado en la descripción continua del principio de Herglotz con restricciones, para el tipo de sistemas con restricciones no holonómicas, y sometidos a fuerzas no conservativas, las cuales pueden consistir en fuerzas disipativas o de control.

1.1. Historia y literatura

En esta sección describimos la historia de los trabajos relevantes a esta tesis. El siguiente texto no pretende ser una esquematización criteriosa, sino una descripción aproximadamente temporal de las siguientes contribuciones.

La formulación variacional de la mecánica comenzó con los trabajos de Euler y Lagrange [30], y a esta formulación fue agregada el principio de d'Alembert para incluir el caso de sistemas con fuerzas no conservativas [31, 46].

Las primeras discusiones sobre las diferencias entre las aplicaciones de principios variacionales a sistemas mecánicos holonómicos y no holonómicos se encuentran en los trabajos de Hertz [21], Korteweg [28] y Chaplygin [8], entre otros. Tratamientos más modernos sobre estos tipos de sistemas y sus correspondientes formulaciones variacionales se pueden encontrar en los trabajos de Neimark y Fufaev [42] y Arnold [2]. Para un correspondiente tratamiento geométrico de estos sistemas se referencian los trabajos de Abraham y Marsden [1], Marsden [36], Bloch y Crouch [5, 4] y Cortés, de León, de Diego y Martínez [10].

Por otra parte, Herglotz [20] generalizó el principio de Hamilton, estableciendo un principio formulado en términos de una ecuación diferencial en lugar de una ecuación integral [17, 16, 48].

El enfoque de la discretización de la formulación variacional para obtener integradores es estándar en la aplicación a problemas elípticos de EDPs [51, 22], y luego este enfoque fue aplicado a sistemas mecánicos, siendo algunos de los principales trabajos de esta línea los de Kane, Marsden, Ortiz y West [25], Marsden y West [38], y West [51], en el contexto del principio variacional de Hamilton. Mientras que un trabajo que trata la aplicación de integradores geométricos para EDOs generales es el escrito por Hairer, Lubich y Wanner [19].

El desarrollo del integrador no holonómico basado en la discretización del principio de Lagrange-d'Alembert se presentó en Cortes y Martínez [9] y junto a este, otros integradores para sistemas no holonómicos, presentados en los trabajos de McLachlan y Perlmutter [39], Kobilarov y Sukhatme [27], Kobilarov, Crane y Desbrun [26] y Ferraro, Jiménez y de Diego [15].

El integrador basado en el principio de Herglotz, denominado de contacto, fue desarrollado en el trabajo de Vermeeren, Bravetti y Seri [49], el cual no contempla restricciones no holonómicas. Por otra parte, en el trabajo de de León, Jiménez y Valcázar [33] desarrollaron

la descripción *continua* del principio variacional de Herglotz con restricciones no holonómicas lineales en las velocidades, sin embargo, su trabajo no abarcó la discretización de dicha descripción continua para obtener un integrador.

1.2. Objetivos de la tesis

- Investigar sobre integradores geométricos para sistemas mecánicos.
- Obtener un integrador para el problema de la integración temporal de sistemas mecánicos no conservativos, no holonómicos.
- Contrastar el integrador obtenido contra otros integradores encontrados en la literatura.

1.3. Contribuciones de la tesis

- Un integrador geométrico de contacto con restricciones no holonómicas para sistemas mecánicos sometidos a fuerzas no conservativas. Este integrador está basado en la discretización de la formulación variacional continua del principio de Herglotz con restricciones, desarrollado por de León, Jiménez y Valcázar [33].
- Aplicación del integrador de contacto propuesto en su versión de primer orden al sistema del péndulo de Foucault con disipación de Rayleigh, y su correspondiente formulación en términos de mecánica geométrica discreta.
- Aplicación del integrador de contacto propuesto en su versión de segundo orden al disco rodante que cae, sometido a fuerzas no conservativas, junto con su correspondiente formulación en términos de mecánica geométrica discreta.
- Comparación de las ecuaciones discretas de movimiento resultantes de la discretización de los principios variacionales clásicos de Hamilton y Lagrange-d'Alembert con los resultantes del principio variacional de Herglotz con y sin restricciones.
- Comparación en términos cualitativos del integrador de contacto propuesto contra esquemas numéricos tradicionales utilizados para la integración en el tiempo de sistemas de ecuaciones diferenciales generales.

1.4. Esquema de la tesis

Este trabajo está dividido en dos partes principales. La primera parte abarca la teoría desarrollada en la literatura con relación a integradores en tiempo para sistemas de ecuaciones diferenciales generales y luego en particular para sistemas mecánicos.

- La formulación teórica de integradores de tiempo para sistemas dinámicos, junto con los principios variacionales correspondientes a mecánica geométrica en sus versiones continua y discreta, se tratan en el Capítulo 2.

En la segunda parte se desarrollan las contribuciones de este trabajo, en base a la teoría presentada en la primera parte.

- La formulación del integrador geométrico de contacto con restricciones no holonómicas se trata en el Capítulo 3.
- Los resultados numéricos obtenidos a partir del integrador de contacto propuesto y los métodos tradicionales contra los cuales se realizan las comparaciones cualitativas se muestran en el Capítulo 4.
- Las ideas generales con relación a los integradores geométricos para sistemas mecánicos, la implementación y los resultados obtenidos por el integrador de contacto propuesto y líneas de trabajo futuro se discuten y concluyen en el Capítulo 5.

Capítulo 2

Fundamento Teórico

Indeed, the idea of enlarging reality by including “tentative” possibilities and then selecting one of these by the condition that it minimizes a certain quantity, seems to bring a purpose to the flow of natural events.

— Cornelius Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*

El propósito de este capítulo consiste en establecer las nociones básicas necesarias para obtener los integradores geométricos aplicados a sistemas mecánicos. En particular, se desarrollan las herramientas utilizadas en mecánica geométrica.

Primeramente, se definen los objetos geométricos donde se describen la dinámica de los sistemas mecánicos. A continuación, se presentan los principios variacionales aplicados a cada tipo de sistema mecánico, los cuales hacen uso de los objetos geométricos descritos en la primera parte para su formulación. Finalmente, se muestra el mecanismo para la obtención de integradores geométricos para su aplicación a sistemas mecánicos y cómo estos se obtienen a partir de la discretización de los principios variacionales de la mecánica.

2.1. Mecánica geométrica y Principios variacionales

La mecánica geométrica consiste en la descripción de la mecánica en el lenguaje de la geometría diferencial. Por otro lado, los principios variacionales han permitido una concepción alternativa (y a veces más fundamental) de la física en general, y en particular de la mecánica. En esta sección daremos una breve introducción a las herramientas matemáticas necesarias para entender estos formalismos. El lector interesado en un tratamiento más profundo de estos temas puede consultar los trabajos de Bloch [6], Lanczos, [31] y Marsden [37] y las referencias que se encuentran en los mismos.

2.1.1. Espacio de configuraciones: Variedades

En mecánica analítica, la configuración de un sistema mecánico se especifica mediante *coordenadas generalizadas*, que se pueden interpretar como el mínimo número de coorde-

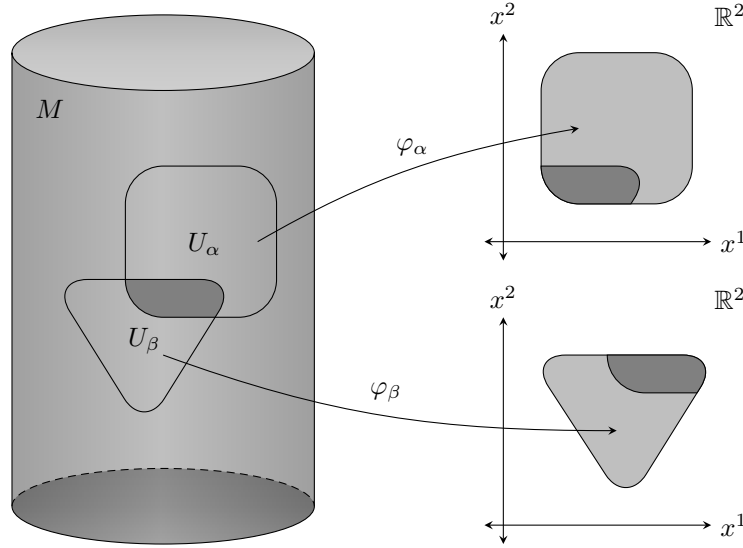


Figura 2.1: Cartas coordenadas en una variedad.

nadas requeridas para describir la configuración de un sistema y típicamente se denotan por $q^1, \dots, q^n$ [52]. El conjunto de todos los valores que pueden tomar las coordenadas generalizadas, denotada por Q , se conoce como *espacio de configuraciones*. Resulta que este conjunto por lo general no es un espacio vectorial, pero localmente luce como un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ [6, 47, 32]. Para hacer precisa dicha idea, necesitamos el concepto de variedades diferenciables. Este concepto se define a seguir.

Definición 2.1.1. (Bloch y col. [6], Definition 2.2.1). Una **variedad diferenciable** M de dimensión n es un conjunto de puntos junto con un conjunto finito o infinito numerable de subconjuntos $U_\alpha \subset M$ y mapas $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ inyectivos tales que:

1. $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$.
2. Para cada intersección no vacía $U_\alpha \cap U_\beta$, el conjunto $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y el mapa $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un difeomorfismo de clase C^∞ (infinitas veces diferenciable con inversa infinitas veces diferenciable).
3. La familia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ es maximal con respecto a las condiciones 1 y 2.

Dado un subconjunto $U \subset M$ y un mapa $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, tales que U y φ están en la familia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, el par (U, φ) se denomina **carta coordenada**, y particularmente φ se denomina **función coordenada**. Los subconjuntos U_α pueden ser pensados como “parches” que cubren la variedad y las funciones φ_α nos permiten tratar dichos parches como subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Esta idea se ilustra en la Figura 2.1.

Con respecto a la condición 3 de la Definición 2.1.1, la familia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ es maximal si no está propiamente contenida en ninguna otra familia $\{U_\beta, \varphi_\beta\}$. Una familia de cartas coordenadas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ que cumple las condiciones 1 y 2, se denomina un *atlas* en M . Puede demostrarse que dado un atlas, existe un único atlas maximal que lo contiene [47]. De esta forma, en la práctica no es necesario exhibir un atlas maximal, sino apenas un atlas [32, Prop. 1.17].

Si Q es el espacio de estados de un sistema mecánico, un punto $q \in Q$ especifica una determinada configuración del mismo, y las coordenadas generalizadas $(q^1, \dots, q^n)$ pueden interpretarse como $\varphi(q) = (q^1, \dots, q^n)$, para alguna carta (U, φ) en torno de q .

Ejemplo 1. (Espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$). $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable, en donde un posible atlas consiste en una única carta $(\mathbb{R}^n, I)$ que cubre toda la variedad, donde I es el mapa de identidad. A esta estructura se la denomina *estructura suave estándar de $\mathbb{R}^n$* y a la función coordenada, *coordenadas estándar*. $\triangle$

Ejemplo 2. (Esfera $\mathbb{S}^2$). Considere la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{R}^3$, la cual se construye con el conjunto de puntos $x = (x^1, x^2, x^3)$ a distancia 1 del origen $(0, 0, 0)$, específicamente,

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\|_2 = 1\}.$$

Sea $\mathbb{R}^2$ el plano en $\mathbb{R}^3$ definido por $x^3 = 0$, denotamos $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$ a los polos norte y sur de la esfera, respectivamente. La *proyección estereográfica* $\sigma_N: \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ desde el polo norte se define por el mapa

$$\sigma_N(x) = \frac{(x^1, x^2)}{1 - x^3},$$

análogamente, la proyección estereográfica $\sigma_S: \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ desde el polo sur se define como

$$\sigma_S(x) = \frac{(x^1, x^2)}{1 + x^3},$$

nótese que se cumple $\sigma_N(-x) = -\sigma_S(x)$.

Dadas las cartas $(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \sigma_N)$ y $(\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, \sigma_S)$ se logra cubrir la esfera y cumplir con la condición 1 de la Definición 2.1.1. Además, por la definición de la función σ_N se puede probar que cualquier punto $u \in \mathbb{R}^2$ es imagen de un punto $x \in \mathbb{S} \setminus \{N\}$, y la misma idea se aplica a σ_S , por lo que son biyecciones. De esta forma

$$\sigma_N((\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}) \cap (\mathbb{S}^2 \setminus \{S\})) = \sigma_S((\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}) \cap (\mathbb{S}^2 \setminus \{S\})) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Finalmente, dado $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, el mapa $\sigma_S \circ \sigma_N^{-1}: \sigma_N((\mathbb{S} \setminus \{N\}) \cap (\mathbb{S} \setminus \{S\})) \rightarrow \sigma_S((\mathbb{S} \setminus \{N\}) \cap (\mathbb{S} \setminus \{S\}))$ es

$$(\sigma_S \circ \sigma_N^{-1})(u) = \sigma_S \left(\frac{2u^1, 2u^2, \|u\|_2^2 - 1}{\|u\|_2^2 + 1} \right) = \frac{u}{\|u\|_2^2}, \quad (2.1)$$

el cual es C^∞ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. $\triangle$

Ejemplo 3. (Toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$). Sean $M_1, \dots, M_k$ variedades diferenciables con dimensiones $n_1, \dots, n_k$, respectivamente. Resulta que el producto cartesiano $M_1 \times \dots \times M_k$ es una variedad diferenciable de dimensión $n_1 + \dots + n_k$ con cartas $(U_1 \times \dots \times U_k, \varphi_1 \times \dots \times \varphi_k)$, cuyas funciones coordenadas cumplen

$$(\psi_1 \times \dots \times \psi_k) \circ (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_k)^{-1} = (\psi_1 \circ \varphi_1^{-1}) \times \dots \times (\psi_k \circ \varphi_k^{-1}),$$

y conforman un mapa C^∞ .

Entonces para obtener un atlas en $\mathbb{T}^2$, es suficiente definir un atlas para el círculo unitario $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_2 = 1\}$ y tomar su producto cartesiano. Sea $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{S}^1$, se definen los conjuntos

$$U_1^+ = \{x \in \mathbb{S}^1; x^1 > 0\} \quad \text{y} \quad U_1^- = \{x \in \mathbb{S}^1; x^1 < 0\},$$

para cubrir los hemisferios oriental y occidental, y

$$U_2^+ = \{x \in \mathbb{S}^1; x^2 > 0\} \quad \text{y} \quad U_2^- = \{x \in \mathbb{S}^1; x^2 < 0\},$$

para cubrir los hemisferios norte y sur del círculo, respectivamente. Las funciones coordenadas $\varphi_i^\pm: U_i^\pm \rightarrow \mathbb{B}^1$ se definen como

$$\varphi_1^\pm(x) = (0, x^2) \quad \text{y} \quad \varphi_2^\pm(x) = (x^1, 0),$$

donde $\mathbb{B}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_2 < 1\}$ es la bola abierta de radio 1. De esta forma, tenemos cuatro cartas coordenadas que cubren la totalidad de $\mathbb{S}^1$. Evaluando el mapa composición $\varphi_2^\pm \circ (\varphi_1^\pm)^{-1}: \varphi_1^\pm(U_1^\pm \cup U_2^\pm) \rightarrow \varphi_2(U_1^\pm \cup U_2^\pm)$ resulta

$$(\varphi_2^\pm \circ (\varphi_1^\pm)^{-1})(x) = \varphi_2^\pm \left(\sqrt{1 - \|x\|_2^2}, x^2 \right) = \left(\sqrt{1 - \|x\|_2^2}, 0 \right),$$

y se tiene una evaluación similar para la composición $\varphi_1^\pm \circ (\varphi_2^\pm)^{-1}$. La compuesta

$$\varphi_i^+ \circ (\varphi_i^-)^{-1} = \varphi_i^- \circ (\varphi_i^+)^{-1} = I,$$

donde I es el mapa identidad. Así, todas las composiciones de funciones coordenadas son de clase C^∞ . △

Ejemplo de espacio de configuración como variedad diferenciable. Consideremos el sistema del péndulo doble, el cual se compone de dos masas puntuales que se mueven en un plano y se encuentran unidas por varillas rígidas sin masa, como se muestra en la Figura 2.2, y cuya configuración está parametrizada por las coordenadas generalizadas q^1 y q^2 . Esto es, la posición del punto P en el espacio queda completamente determinada por los valores (q^1, q^2) que son los ángulos que las varillas de los péndulos forman con respecto a las líneas verticales para el primer y segundo péndulo, respectivamente.

Como (q^1, q^2) son ángulos, el valor de cada uno se especifica naturalmente en el círculo unitario $\mathbb{S}^1$. Resulta entonces que para el péndulo doble el espacio de configuraciones es el toro $Q = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. La estructura geométrica del toro se muestra en la Figura 2.3.

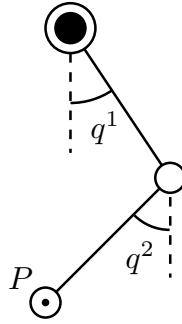
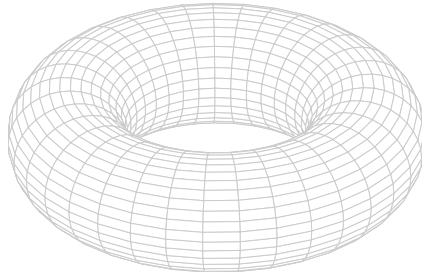


Figura 2.2: El péndulo doble y sus variables de configuración.

Figura 2.3: Un toro, denominado $\mathbb{T}^2$ en topología, es el resultado del producto cartesiano de dos circunferencias, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

2.1.2. Espacio de estados: Fibrado tangente

A fin de estudiar la dinámica de un sistema, esto es, su evolución en el tiempo, necesitamos conocer sus velocidades además de sus posiciones. Dado un sistema con espacio de configuraciones Q y una configuración inicial $q_0 \in Q$, la evolución de dicho sistema puede describirse mediante una curva

$$q: [t_0, t_f] \rightarrow Q; t \mapsto q(t),$$

tal que $q(t_0) = q_0$. A la derivada de q respecto de t , usualmente denotada como $\dot{q}(t)$, se la conoce como *velocidad generalizada*, y al par $(q(t), \dot{q}(t))$ como el *estado* del sistema en el instante t . Notemos que el estado $(q(t), \dot{q}(t))$ depende del estado inicial $(q_0, \dot{q}_0)$, y de la ley que gobierna la evolución del sistema, usualmente descrita mediante una ecuación diferencial.

El *espacio de estados* es el conjunto de todos los estados posibles de un sistema. Veremos ahora que el espacio de estados de un sistema mecánico con espacio de configuraciones Q también admite una descripción en términos de una variedad diferenciable, naturalmente asociada a la variedad Q .

Para comprender mejor la naturaleza de este objeto conviene introducir un par de conceptos previos.

Definición 2.1.2. Dada una variedad diferenciable M , un mapa $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable si para cualquier carta (U, φ) de M el mapa $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable. Análogamente, un mapa $g: W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ es diferenciable si para cualquier carta (U, φ) de M cuyo dominio intersecta $g(W)$, el mapa $\varphi \circ g: g^{-1}(U \cap g(W)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable.

Observación 1. Notemos que con esta definición, las funciones coordenadas de un atlas en M son automáticamente difeomorfismos sobre sus imágenes (esto es, diferenciables con inversas diferenciables).

Al conjunto de todas las funciones $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables lo denotaremos como $C^\infty(M)$. Notemos que este conjunto es un álgebra sobre los reales, es decir, es un espacio vectorial real con un producto

$$(f, g) \mapsto fg,$$

compatible con la estructura de espacio vectorial, en el sentido de que valen las igualdades

$$\begin{aligned} (f + g)h &= fh + gh \\ (\alpha f)(\beta g) &= \alpha\beta(fg), \end{aligned}$$

para cualesquiera $f, g, h \in C^\infty(M)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definición 2.1.3 (Vector tangente: Punto de vista algebraico). Dada una variedad diferenciable M y un punto $p \in M$, un vector tangente a M en p es una derivación en p del álgebra $C^\infty(M)$, esto es, un mapa lineal

$$D_p: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisface la regla de Leibniz

$$D_p(fg) = D_p(f)g(p) + f(p)D_p(g),$$

para todo $f, g \in C^\infty(M)$. Al conjunto de todos los vectores tangentes a M lo denotaremos mediante $\mathcal{D}_p M$.

Con esta definición es fácil observar que el conjunto $\mathcal{D}_p M$ es un espacio vectorial, aunque no queda nada claro su relación con las velocidades generalizadas de un sistema mecánico. Para subsanar dicha situación, daremos otro punto de vista del mismo objeto.

Definición 2.1.4 (Vector tangente: Punto de vista geométrico). Dos curvas diferenciables $t \mapsto c_1(t)$ y $t \mapsto c_2(t)$ en una variedad M son equivalentes en $p \in M$ si

$$c_1(0) = c_2(0) = p \quad \text{y} \quad (f \circ c_1)'(0) = (f \circ c_2)'(0), \quad (2.2)$$

para cualquier $f \in C^\infty(M)$, donde la prima indica la derivada con respecto al parámetro t . Notemos que esto define una relación de equivalencia en el conjunto de curvas diferenciables $t \mapsto c(t) \in M$ que pasan por p en $t = 0$. Dado $p \in M$, un vector tangente a M en p es una clase de equivalencia de curvas dada por la relación de equivalencia anterior. El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p se denota mediante $\mathcal{V}_p M$.

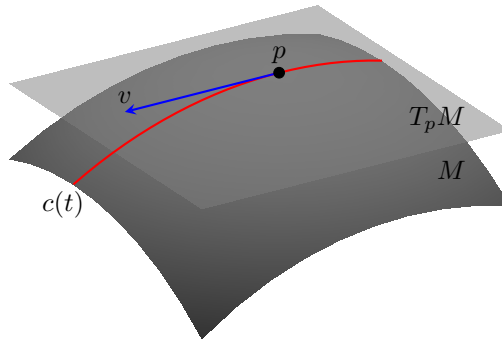


Figura 2.4: Espacio tangente a una variedad M en un punto p .

Con esta definición es intuitivo asociar los vectores tangentes con las velocidades generalizadas de un sistema mecánico (ver Figura 2.4.), pero el hecho de que el conjunto $\mathcal{V}_p M$ admite una estructura de espacio vectorial no es aparente en absoluto. El siguiente resultado estándar establece que ambas definiciones son equivalentes, y nos dice además que dicho espacio vectorial es isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Para comodidad del lector, la prueba se encuentra en el Apéndice B.

Teorema 1. *Dada una variedad diferenciable M de dimensión n , existe una biyección entre los conjuntos $\mathcal{D}_p M$ y $\mathcal{V}_p M$. Denotaremos ambos mediante $T_p M$, y lo llamaremos espacio tangente a M en p . Además $T_p M$ es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Consideremos ahora un sistema mecánico con espacio de configuraciones Q que evoluciona según la curva $q: [t_0, t_f] \rightarrow Q$. Para cada valor del parámetro t , el estado del sistema queda definido mediante $(q(t), \dot{q}(t))$, donde $\dot{q}(t)$ puede interpretarse como un elemento del espacio tangente $T_{q(t)}(Q)$. Si bien todos los espacios tangentes $T_q Q$ son isomorfos a $\mathbb{R}^n$ es útil para la formulación geométrica de la mecánica no identificar los diferentes espacios tangentes. De tal forma, resulta conveniente introducir otro concepto geométrico, a saber, el fibrado tangente de Q .

Definición 2.1.5 (Fibrado tangente Definición/Teorema). *Dada una variedad diferenciable M , consideremos el conjunto*

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M,$$

unión disjunta de todos los espacios tangentes a M . Este conjunto admite una estructura de variedad diferenciable, y se conoce como el fibrado tangente de M .

Probar que este conjunto admite una estructura de variedad diferenciable conlleva cierta tecnicidad que no es apropiada en este punto. El lector interesado puede encontrar todos los

detalles en cualquier texto introductorio sobre variedades diferenciables, como por ejemplo [32, 47, 50].

Lo importante para nuestro estudio de la mecánica es notar que cualquier atlas en M induce de forma natural un atlas en TM . Para ver eso, primero notemos que un elemento cualquiera de TM es de la forma (p, v) , con $p \in M$ y $v \in T_pM$, y que existe una proyección natural $\pi: TM \rightarrow M$ dado por $\pi(p, v) = p$.

Sea (U, φ) una carta en M y $p \in U$, entonces, si $\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, una base para T_pM es dada por $\{\partial x_1|_p, \dots, \partial x_n|_p\}$, (ver Apéndice B) donde

$$\partial x_i|_p := (\varphi'_p)^{-1}e_i,$$

siendo e_i el i -ésimo elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

De esta forma, dado cualquier punto $(p, v) \in \pi^{-1}(U) \subset TM$, podemos escribir

$$v = \sum_i v^i(p) \partial x_i|_p,$$

para ciertas funciones $v^i: U \rightarrow \mathbb{R}$. Como esta descripción es válida para cualquier punto en $\pi^{-1}(U) \subset TM$, obtenemos un mapa $\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dado por

$$\tilde{\varphi}(p, v) = (\varphi(p), v^1(p), \dots, v^n(p)).$$

La familia $(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\varphi}_\alpha)$ así obtenida a partir de un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de M , constituye un atlas para TM .

De esta forma, dado un sistema mecánico cuyo espacio de configuraciones se modela mediante una variedad Q , su espacio de estados puede modelarse como el fibrado tangente TQ .

2.1.3. Restricciones: Subvariedades

La propia construcción de un sistema mecánico y su correspondiente idealización matemática implica determinar las maneras en que dicho sistema puede moverse. Cuando se establecen condiciones de movimiento, se dice que se imponen *restricciones* sobre el sistema.

Desde el punto de vista de la mecánica geométrica, las restricciones se interpretan como subconjuntos de un espacio ambiente que podría ser el espacio de configuraciones si no hubiese restricciones. Por ejemplo, si al péndulo doble lo liberamos de las restricciones, obtenemos un par de masas puntuales que pueden moverse libre e independientemente en un plano, y tiene a $\mathbb{R}^4$ como espacio de configuraciones. Al colocar las restricciones, vimos que el espacio de configuraciones del péndulo doble es $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, que es un subconjunto de $\mathbb{R}^4$.

Esta idea se generaliza para subconjuntos de cualquier variedad diferenciable, y de esa forma el concepto geométrico necesario para estudiar las restricciones mecánicas es el de las subvariedades, que introducimos formalmente a continuación.

Definición 2.1.6 (Subvariedad Regular). *Dada una variedad diferenciable M de dimensión n , un subconjunto $N \subset M$ es una subvariedad regular de dimensión $k \leq n$ si para cada punto $p \in N$ existe una carta (U, φ) de M en torno de p tal que $N \cap U$ queda definida por las ecuaciones $x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0$, siendo $\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.*

Conviene observar que existen otras nociones de subvariedades, como por ejemplo las subvariedades *inmersas* [32], que no consideraremos en este trabajo. Una propiedad importante de las subvariedades regulares $N \subset M$ es que pueden verse en sí mismas como variedades diferenciables cuyo atlas maximal se obtiene simplemente intersectando el atlas maximal de M con N . Esto permite muchas veces omitir el hecho de que N es un subconjunto, y en su lugar tratarlo de forma intrínseca. El hecho de que N sea en sí mismo una variedad diferenciable nos permite hablar de su espacio tangente en cada uno de sus puntos, y de su fibrado tangente. En particular, dado $p \in N$ tenemos que $T_p N$ es un subespacio vectorial del espacio $T_p M$.

Supongamos ahora que un sistema mecánico sin restricciones tiene un espacio de configuraciones $\tilde{Q}$, y una vez que se imponen ciertas restricciones al mismo, pasa a tener un espacio de configuraciones Q modelado como una subvariedad de $\tilde{Q}$.

Dada una configuración dependiente del tiempo $q(t) \in Q$, en principio el sistema puede tener un estado $(q(t), \dot{q}(t))$, donde $\dot{q}(t) \in T_{q(t)} Q \subset T_{q(t)} \tilde{Q}$. Dependiendo de si las restricciones permiten o no que todo el espacio tangente $T_{q(t)} Q$ esté disponible para la velocidad generalizada $\dot{q}(t)$ podemos dividir las mismas en dos grandes categorías, que pasaremos a discutir a continuación.

2.1.3.1. Restricciones holonómicas

Aquellas condiciones de movimiento que imponen restricciones sobre las posibles posiciones geométricas de las partes individuales del sistema se denominan restricciones geométricas [42], y en el contexto de la Mecánica de Lagrange se denominan **holonómicas**. Como este tipo de restricciones expresan la relación geométrica entre las coordenadas del sistema se pueden escribir como función de dichas coordenadas.

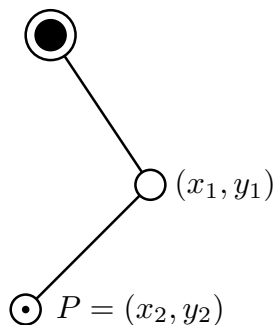
Sean $q^1, \dots, q^n$ las coordenadas (no necesariamente generalizadas) del sistema, una restricción *holonómica* puede escribirse como

$$f(q^1, \dots, q^n) = 0. \quad (2.3)$$

Ejemplo 4. Considere de nuevo el péndulo doble, pero esta vez visto en $\mathbb{R}^2$ como se muestra en la Figura 2.5. Si establecemos coordenadas cartesianas para determinar la posición del punto $P = (x_2, y_2)$, las masas de los péndulos deben satisfacer las condiciones

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 &= 0, \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

en donde ambas restricciones se expresan de la forma (2.3) y por tanto se tratan de restricciones holonómicas.

Figura 2.5: Péndulo doble en $\mathbb{R}^2$.

Nótese la diferencia entre las parametrizaciones que ya hemos visto para el péndulo doble. Por una parte tomando coordenadas generalizadas, como se indica en la Figura 2.2, dos ángulos q^1 y q^2 son suficientes para determinar la configuración de este sistema y el espacio de configuraciones es $Q = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, donde q^1 y q^2 no están restringidos para tomar cualquier valor en $\mathbb{S}^1$.

Por otra parte, estudiando el movimiento del péndulo doble en el plano cartesiano, necesitamos cuatro coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) para determinar su configuración y el espacio de configuraciones es un subconjunto de $\mathbb{R}^4$, en donde las dos restricciones holonómicas condicionan que cada coordenada x_1, y_1, x_2, y_2 no pueda tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$ de forma independiente a los valores de las demás. $\triangle$

Un sistema que solo presenta restricciones holonómicas se denomina holónomo u holonómico. Si un sistema holonómico tiene n coordenadas, entre las cuales existen k ecuaciones de restricción, entonces k de las coordenadas se pueden expresar como funciones de las $n - k$ restantes. De esta forma estas $n - k$ coordenadas elegidas de forma arbitraria determinan completamente la configuración del sistema, y pueden, en omisión a las restantes coordenadas, ser consideradas como coordenadas libres del sistema [21].

En términos geométricos, las restricciones holonómicas se pueden entender de la siguiente manera. Sea $\tilde{Q}$ la variedad de configuración de un sistema sin restricción alguna, las restricciones holonómicas reducen la variedad de configuración del sistema a una subvariedad Q de $\tilde{Q}$, y dada una configuración $q \in Q$, todo el espacio tangente $T_q Q$ está disponible para las posibles velocidades del sistema.

Un ejemplo simple para visualizar la situación arriba mencionada, es la de un punto material que se mueve en $\mathbb{R}^3$. Si no hay restricciones, su espacio de configuración sería todo $\mathbb{R}^3$. Si restringimos al punto a moverse manteniendo una distancia constante de un punto fijo especificado, su espacio de configuraciones pasa a ser la esfera. Como en cada punto de la esfera la partícula puede tener cualquier velocidad dentro del plano tangente a la esfera en dicho punto, estamos ante una restricción holonómica. En este caso, al menos en principio, podría omitirse el ambiente $\mathbb{R}^3$ y estudiar la dinámica de la partícula considerando

únicamente su espacio de configuraciones (la esfera) y su espacio de estados (el fibrado tangente de la esfera).

2.1.3.2. Restricciones no holonómicas

No todos los tipos de restricciones sobre un sistema se pueden expresar como condiciones geométricas sobre sus coordenadas. Cuando las restricciones se expresan condicionando los movimientos cinemáticamente posibles del sistema, es decir, condicionando los valores de sus velocidades además de sus coordenadas, tales restricciones se denominan cinemáticas, y Hertz las denominó **no holonómicas** en el contexto del estudio del movimiento de cuerpos rígidos restringidos a rodar sin deslizarse sobre un plano [42, 31, 21].

Sean $(q^1, \dots, q^n)$ y $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ las coordenadas y las velocidades del sistema, respectivamente, una restricción *no holonómica* es una relación de la forma

$$f(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = 0, \quad (2.5)$$

donde es imposible eliminar las velocidades en la expresión a fin de obtener una relación que involucre solo a las coordenadas de configuración. A este tipo de restricciones también se la denomina *no integrable*, ya que las restricciones involucran relaciones diferenciales de las coordenadas de configuración que no pueden integrarse para obtener una relación únicamente entre las coordenadas de configuración.

Un caso particular importante de restricciones no holonómicas son aquellas que presentan una dependencia lineal o afín en las velocidades. Específicamente, la dependencia afín en las velocidades se expresa de la forma

$$\sum_{k=1}^n (a_k^j(q) \dot{q}^k + b_k^j(q)) = 0, \quad j = 1, \dots, m < n, \quad (2.6)$$

o de forma más concisa, usando notación matricial, como

$$A(q)\dot{q} + b(q) = 0,$$

siendo el caso lineal cuando el término $b(q)$ es idénticamente nulo. En este trabajo acotamos el estudio de los sistemas no holonómicos a aquellos cuyas restricciones se pueden expresar con la forma de la ecuación (2.6).

Ejemplo 5. Un arquetipo de sistema no holonómico consiste en una esfera que se mueve sobre una superficie horizontal áspera de forma que la misma no puede deslizarse sobre la superficie y tampoco puede levantarse de la misma.

Si una esfera pudiese moverse libremente en el espacio $\mathbb{R}^3$ se necesitarían seis coordenadas, x, y, z, ϕ, θ y ψ , para determinar su configuración. Aquí generalmente se toma $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como las coordenadas del centro de masa de la esfera, y (ϕ, θ, ψ) son los ángulos de Euler, que sirven para determinar la orientación de la esfera respecto de un sistema de referencia inercial.

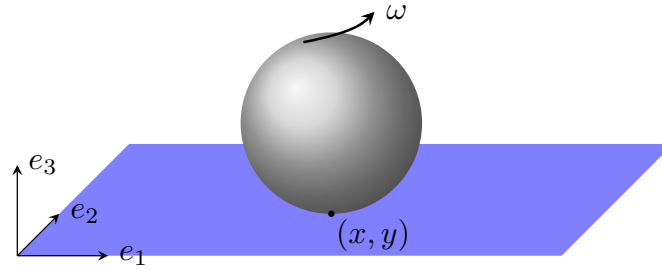


Figura 2.6: La esfera que rueda sin deslizarse y sus variables de configuración.

En el caso del ejemplo considerado, como la esfera permanece en un plano, la altura de su centro permanece constante, podemos parametrizar su posición con las coordenadas del punto de contacto con el plano (x, y) y los ángulos (ϕ, θ, ψ) . Dadas las trayectorias x e y como funciones del tiempo, la condición de no deslizamiento determina de forma única la posición de la esfera para un tiempo t dado.

Sin embargo, los valores de ϕ , θ y ψ no pueden expresarse en términos de x e y , como sería si las restricciones de movimiento fuesen holonómicas. Considere que la esfera comienza a rodar, desde un cierto punto inicial y configuración fijos, y rueda por dos diferentes caminos llegando al mismo punto final de contacto, resulta que las dos orientaciones finales son diferentes y por este motivo estos ángulos eulerianos no son únicos para x e y dados. Entonces, para este sistema, las condiciones de movimiento no están dadas únicamente en términos de las coordenadas, sino que se expresan también mediante las velocidades.

Específicamente, sea la esfera con radio a y $\omega \in \mathbb{R}^3$ su velocidad angular con respecto a los ejes inerciales $\{e_1, e_2, e_3\}$, con e_1 y e_2 fijos en el plano sobre el cual rueda la esfera, y e_3 perpendicular al mismo, como se muestra en la Figura 2.6. Entonces las ecuaciones de restricción se escriben

$$\begin{aligned} ae_2^T \omega + \dot{x} &= 0, \\ ae_1^T \omega - \dot{y} &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

△

En términos geométricos, las restricciones no holonómicas reducen el espacio tangente a la variedad en cada punto a un subconjunto definido en términos de las funciones de restricción. Precisamente, sea $\tilde{Q}$ la variedad de configuración de un sistema sin restricción alguna, las restricciones no holonómicas reducen la variedad de configuración del sistema a una subvariedad Q de $\tilde{Q}$, donde dada una configuración $q \in Q$, el conjunto de todas las posibles velocidades que el sistema puede tomar en q es un subconjunto propio de $T_q Q$, esto es, no todo el espacio tangente $T_q Q$ está disponible para las velocidades generalizadas. En particular, en este trabajo estudiamos sistemas no holonómicos cuyas restricciones se pueden escribir en la forma de la ecuación (2.6), esto implica que en cada punto $q \in Q$, las posibles velocidades $\dot{q}$ del sistema se encuentran en un subespacio propio (que puede ser afín) de $T_q Q$.

En un sentido estricto, las restricciones no holonómicas son todas aquellas que no se pueden escribir como la ecuación (2.3) [6, 18, 29]. Pero generalmente y por motivos históricos se llaman sistemas no holonómicos a aquellos con funciones de restricción en las velocidades, de la forma (2.5) [21].

Diferenciar sistemas holonómicos y no holonómicos es esencial para determinar si una formulación variacional es aplicable a un sistema dado, como veremos en 2.1.4.

2.1.4. Principios Variacionales

La mecánica analítica consiste en traducir el mundo físico a relaciones expresadas en términos de cálculo diferencial e integral. Como Lagrange indica en su trabajo seminal en esta área, *Mécanique Analytique*, “Los métodos que presento no requieren construcciones geométricas o mecánicas, sino solamente operaciones algebraicas sometidas a un procedimiento regular y uniforme” [30].

En este contexto, existen un conjunto de principios que emplean herramientas del cálculo variacional para proveer de un mecanismo por el cual se obtienen las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico. Cada uno de estos principios se aplica dependiendo de las características del sistema considerado.

Para el caso de sistemas holonómicos conservativos, los cuales se describen en la Subsección 2.1.3.1, las ecuaciones de movimiento se obtienen del principio de Hamilton.

2.1.4.1. Formulación de Lagrange y el Principio de Hamilton

Dado un sistema mecánico conservativo cuyo espacio de configuraciones es Q , la formulación lagrangiana de la mecánica establece que la dinámica de dicho sistema queda codificada en una función $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ llamada **lagrangiano**, que típicamente tiene la forma

$$L(q, \dot{q}) = K(\dot{q}) - V(q),$$

donde K y V son las energías cinética y potencial del sistema, respectivamente.¹

En este contexto, la trayectoria del sistema entre dos configuraciones determinadas $q_a, q_b \in Q$ se obtiene mediante el principio de Hamilton. Más precisamente, dados los puntos $q_a, q_b \in Q$, sea $C^\infty([a, b], Q)$ el conjunto de todas las curvas suaves $q: [a, b] \rightarrow Q$ con extremos en los puntos q_a y q_b , se define la funcional de **acción** $S: C^\infty([a, b], Q) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$S(q(t)) = \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t)) dt. \quad (2.8)$$

El principio de Hamilton, que es el resultado principal de la dinámica de Lagrange, establece que la trayectoria *real* del sistema es la curva $q(t)$ que extremiza (minimiza o maximiza) la funcional de acción (2.8).

¹Para sistemas como una partícula en un campo magnético, el lagrangiano *no* es simplemente la energía cinética menos la energía potencial [6].

Debido a que el dominio de S es de dimensión infinita, necesitamos usar algunas herramientas del cálculo variacional para tratar este problema de optimización. Para nuestros propósitos, solo necesitaremos usar los conceptos de variación de una curva y la derivada de Gateaux, que pasamos a estudiar ahora (el lector interesado en más detalles sobre el cálculo variacional puede consultar las referencias [14, 31]).

Definición 2.1.7. *Dada una curva $q: [a, b] \rightarrow Q$ con extremos $q(a) = q_a$ y $q(b) = q_b$, una **variación con extremos fijos** de q es un mapa suave*

$$(t, \epsilon) \mapsto \gamma(t, \epsilon), \quad a \leq t \leq b, \quad \epsilon \in (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R},$$

que satisfice

1. $\gamma(t, 0) = q(t)$ para $t \in [a, b]$,
2. $\gamma(a, \epsilon) = q_a$, $\gamma(b, \epsilon) = q_b$.

Definición 2.1.8. *El **desplazamiento virtual** $\delta q: [a, b] \rightarrow TQ$ de la variación de la curva $q(t)$ está dado por la expresión*

$$\delta q(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \gamma(t, \epsilon) \right|_{\epsilon=0}. \quad (2.9)$$

Lema 2. Lema fundamental del cálculo de variaciones. (Jost y Li-Jost [23], Lemma 1.1.1). *Si $h \in C^0((a, b), \mathbb{R}^d)$ satisfice*

$$\int_a^b h(t) \phi(t) dt = 0 \quad \text{para todo } \phi \in C_0^\infty((a, b), \mathbb{R}^d), \quad (2.10)$$

entonces $h \equiv 0$ en (a, b) .

La extremización de la funcional S se determina tomando su variación, que se da por su derivada de Gateaux en la variedad Q , que se define como

$$\delta S(q(t)) = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} S(\gamma(t, \epsilon)) \right|_{\epsilon=0}, \quad (2.11)$$

y donde se cumple $\delta S(q(t)) = 0$ para una curva $q(t)$ que extremiza S .

Desarrollando la expresión del lado derecho de la ecuación (2.11) mediante reglas de cálculo y utilizando la Definición 2.1.8, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} S(\gamma(t, \epsilon)) \right|_{\epsilon=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int_a^b L(\gamma(t, \epsilon), \dot{\gamma}(t, \epsilon)) dt \right|_{\epsilon=0} \\
&= \int_a^b \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} L(\gamma(t, \epsilon), \dot{\gamma}(t, \epsilon)) \right|_{\epsilon=0} dt = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q) dt,
\end{aligned}$$

integrando por partes el segundo término,

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt,$$

como $\delta q(a) = \delta q(b) = 0$,

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0,$$

(2.12)

y por el Lema 2 se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0,$$

(2.13)

que es precisamente la ecuación de Euler-Lagrange (EL), que para un lagrangiano L dado resulta en las ecuaciones de movimiento del sistema.

Ejemplo 6. Considere el péndulo planar, que consiste en una bola de masa m , que cuelga sujeta mediante una varilla rígida de masa despreciable de longitud l a un pivote que se encuentra en una posición fija. Como el sistema se encuentra bajo la influencia de la aceleración gravitacional g , cuando la varilla se ubica a un ángulo q con respecto a la vertical del pivote y se suelta, el péndulo se mueve de un lado a otro con un movimiento periódico. Las variables de configuración de este sistema se muestran en la Figura 2.7.

Para determinar la dinámica del sistema se puede aplicar la segunda ley de Newton, que expresa que para una partícula con masa constante m se tiene

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t),$$

(2.14)

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ es la posición de la partícula y $\mathbf{F}(t)$ es la fuerza ejercida sobre la partícula, ambas medidas con respecto a un sistema inercial.

Debido a la simetría circular del movimiento, en el enfoque vectorial de la mecánica es usual utilizar coordenadas polares (ρ, q) y magnitudes dinámicas angulares. De esa forma, la dinámica del péndulo simple puede describirse mediante la ecuación

$$\tau(t) = I\ddot{q}(t),$$

(2.15)

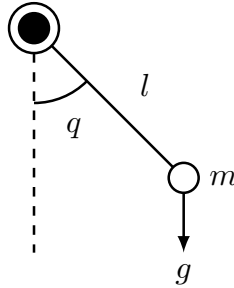


Figura 2.7: El péndulo planar y sus variables de configuración.

donde $\tau(t) = l\mathbf{F}(t) \sin q(t)$ es el torque neto, $I = ml^2$ es el momento de inercia de m respecto del eje de rotación, y $\ddot{q}(t)$ es la aceleración angular de m .

Midiendo el ángulo $q(t)$ positivo en el sentido antihorario, la ecuación (2.15) se reduce a

$$\ddot{q} = -\frac{g}{l} \sin q, \quad (2.16)$$

cuya solución para cada condición inicial especificada describe el movimiento del péndulo.

Mediante la formulación lagrangiana de la mecánica, puede tomarse el ángulo q como coordenada generalizada, y se considera el lagrangiano

$$L(q, \dot{q}) = K(\dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2 + mgl \cos q. \quad (2.17)$$

Utilizando la ecuación de Euler-Lagrange (2.13) para el lagrangiano (2.17), se obtiene

$$-mgl \sin q - ml^2\ddot{q} = 0 \Rightarrow \ddot{q} = -\frac{g}{l} \sin q, \quad (2.18)$$

que es la misma que la ecuación (2.16), obtenida a mediante la formulación newtoniana. $\triangle$

Observación 2. Observemos que en el lagrangiano $L = K - V$, el término V puede (y debe) incorporar cualquier fuente de energía potencial. Es decir, que el principio de Hamilton es apropiado para tratar sistemas holonómicos sujetos a fuerzas conservativas, esto es, expresables como el gradiente de un potencial.

2.1.4.2. Principio de Lagrange-d'Alembert

Para el caso general con fuerzas externas no necesariamente conservativas, es necesario modificar el principio de Hamilton, obteniéndose el llamado principio de Lagrange-d'Alembert. La idea inicial, de d'Alembert, fue suponer que las fuerzas y las reacciones inerciales forman un sistema en equilibrio [30]. Posteriormente esta idea se escribió en forma variacional por Lagrange.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen por un principio similar al variacional donde el camino del sistema se determina mediante

$$\delta \int_a^b L(q, \dot{q}) dt + \int_a^b F^e \delta q dt = 0 \quad (2.19)$$

donde $F^e \delta q = \sum_{i=1}^n F_i^e \delta q^i$ es el *trabajo virtual* hecho por la fuerza externa F^e con un desplazamiento virtual δq .

Desarrollando la ecuación (2.19), de la misma forma que la ecuación (2.12) para el primer término, se obtiene

$$\delta \int_a^b L(q, \dot{q}) dt + \int_a^b F^e \delta q dt = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + F^e \right) \delta q dt = 0, \quad (2.20)$$

y por el Lema 2,

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + F^e = 0. \quad (2.21)$$

Esto resulta en las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = F_i^e, \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (2.22)$$

Ejemplo 7. Considere el sistema mecánico del péndulo planar, que adicionalmente está sometida a una fuerza no conservativa que consiste en un torque constante τ en el pivote, el cual realiza un trabajo W dado por

$$W = \tau q. \quad (2.23)$$

La fuerza externa que realiza este trabajo es $F^e = \frac{\partial W}{\partial q} = \tau$.

Utilizando las ecuaciones (2.22) sobre el lagrangiano (2.17) y la fuerza externa de este sistema, su ecuación de movimiento es

$$\ddot{q} = -\frac{g}{l} \sin q + \frac{\tau}{ml^2}. \quad (2.24)$$

△

Por otra parte, existe una formulación puramente variacional—a diferencia del principio de Lagrange-d'Alembert—para sistemas mecánicos no conservativos con restricciones holonómicas, conocido como principio variacional de Herglotz. A este principio se lo puede considerar una generalización del principio de Hamilton, en el sentido que se explica a continuación.

2.1.4.3. Principio variacional de Herglotz

Este principio corresponde a otra formulación variacional que se utiliza en el contexto de problemas mecánicos no conservativos. En particular, permite un tratamiento más apropiado para sistemas disipativos, en contraste con el principio de Lagrange-d'Alembert [12].

Como habíamos visto en la Sección 2.1, la formulación variacional clásica se basa en un principio integral. En contraste, el principio variacional de Herglotz define la acción en términos de una ecuación diferencial [17, 49], (véase también [12]).

Definición 2.1.9. Sea Q una variedad diferenciable, y $L: \mathbb{R} \times TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave, correspondiente a un lagrangiano en el contexto del principio de Herglotz. Dada una curva $q: [a, b] \rightarrow Q$, se define la función $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por una condición inicial $z(a) = z_a$ y la ecuación diferencial

$$\dot{z} = L(t, q(t), \dot{q}(t), z(t)). \quad (2.25)$$

La curva q es una solución al principio variacional de Herglotz con condición inicial z_a si cada variación de q con extremos fijos deja invariante la acción $z(b)$.

Proposición 1. [49], **Proposition 1.** Una curva q (suficientemente regular) es una solución al principio variacional de Herglotz si y solo si satisface la ecuación de Euler-Lagrange generalizada

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (2.26)$$

donde z se da en términos de q por la ecuación (2.25).

Si L no depende de la función z y no depende explícitamente de t , el lagrangiano corresponde a un sistema conservativo, y entonces la ecuación diferencial (2.25) es resuelta por la integral (2.8). Así, vemos que el principio variacional de Herglotz se reduce al principio de Hamilton en el contexto apropiado. Además, si L no depende de z , entonces $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$ y las ecuaciones de Euler-Lagrange generalizadas (2.26) se reducen a las ecuaciones clásicas de Euler-Lagrange (2.13). Para la correspondiente prueba de la Proposición 1 se referencia al lector el trabajo [49].

Aunque ambos, el principio de Lagrange-d'Alembert y el principio de Herglotz, son formulaciones para sistemas no conservativos, una diferencia fundamental entre ellos se encuentra en la forma en la que se incluyen las fuerzas externas dentro de dichas formulaciones para la obtención de las ecuaciones de movimiento. Por una parte, en el contexto del principio de Lagrange-d'Alembert, las fuerzas externas que no son derivables de un potencial y las cuales agregan una dependencia temporal explícita al sistema, se integran por separado al lagrangiano, como se muestra en 2.1.4.2. Por otra parte, en el contexto del principio variacional de Herglotz dichas fuerzas externas se incluyen directamente en el lagrangiano, como se muestra en el trabajo de Vermeeren [49] y en el Ejemplo 8, por lo tanto, las fuerzas externas a un sistema no son operadas de forma separada a su lagrangiano.

Ejemplo 8. Considere un sistema mecánico con disipación de Rayleigh, la cual se expresa como una función lineal en las velocidades, y sujeta a fuerzas externas que realizan un trabajo generalizado $W = F(t)q$. En este caso, el lagrangiano del sistema considerado se escribe como

$$L(t, q, \dot{q}, z) = K(\dot{q}) - V(q) - \alpha z + F(t)q, \quad (2.27)$$

donde α es el parámetro de disipación de Rayleigh. $\triangle$

Ejemplo 9. Considere nuevamente el péndulo planar que está sometido a una fuerza de torque constante τ en el pivote, como se explica en el Ejemplo 7, además de una disipación de Rayleigh con parámetro α . El lagrangiano de este sistema en el contexto del principio variacional de Herglotz es

$$L(t, q, \dot{q}, z) = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2 + mgl \cos q - \alpha z + \tau q. \quad (2.28)$$

Aplicando las ecuaciones (2.26) al lagrangiano (2.28), resulta la ecuación de movimiento

$$\ddot{q} = -\frac{g}{l} \sin q + \frac{\tau}{ml^2} - \alpha \dot{q}. \quad (2.29)$$

Nótese que si el sistema no tuviera disipación de Rayleigh, es decir $\alpha = 0$, el lagrangiano no dependería de z . En esta situación, el sistema descrito sería el que se encuentra en el Ejemplo 7 y las ecuaciones de movimiento serían las mismas que las ecuaciones (2.24), obtenidas mediante el principio de Lagrange-d'Alembert. $\triangle$

Si bien las ecuaciones continuas de los sistemas, que resultan de la aplicación de los principios de Lagrange-d'Alembert y Herglotz pueden ser las mismas, las ecuaciones discretas de los integradores que se obtienen a partir de estos principios pueden ser diferentes, como veremos en la Sección 2.2.

2.1.4.4. Principio de Lagrange-d'Alembert y principio no holonómico

En el contexto de la obtención de las ecuaciones de movimiento para sistemas no holonómicos, resulta que la aplicación del principio de Hamilton lleva a resultados que no son físicamente correctos para el movimiento natural de estos sistemas. Cuando Lagrange formuló las ecuaciones de movimiento para sistemas mecánicos, no sospechó de la existencia de este tipo de restricciones [42].

Considere de nuevo el sistema de la esfera que se mueve sin deslizarse, como se explica en el Ejemplo 5. En este caso, si la esfera se mueve de acuerdo al principio de Hamilton tendría la apariencia de una entidad consciente que tiene como objetivo moverse desde una cierta configuración inicial a una configuración final en el menor tiempo posible [21]. Dicho esto, la aplicación de este principio variacional para sistemas no holonómicos se da precisamente en el área de control óptimo [6, 24].

Para obtener las ecuaciones de movimiento naturales de un sistema no holonómico, en el contexto de los principios variacionales, se asume la existencia de fuerzas que restringen

los posibles movimientos del sistema de manera que este cumpla con las condiciones no holonómicas, en donde estas fuerzas no realizan trabajo.

Considérese un sistema mecánico con espacio de configuraciones Q y lagrangiano $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$, sujeto a m restricciones lineales en las velocidades, representadas por la ecuación

$$A(q)\dot{q} = 0, \quad (2.30)$$

donde $A(q)$ es una matriz $m \times n$, con $m < n$, y $\dot{q} \in T_q Q$ es un vector columna.

En cualquier configuración q del sistema, el conjunto de todos los posibles *desplazamientos virtuales* $\delta q \in T_q Q$ debe cumplir con las restricciones impuestas en la ecuación (2.30), así

$$A(q)\delta q = 0, \quad (2.31)$$

es decir, el subespacio de todos los desplazamientos virtuales *posibles* se define como el kernel de la matriz $A(q)$.

Para imponer las condiciones no holonómicas sobre el sistema se introducen fuerzas de restricción $F = [F_1, \dots, F_m]$ con el propósito de limitar sus posibles movimientos a aquellos que cumplan las restricciones impuestas por las ecuaciones (2.31). Se *asume* que estas no hacen trabajo para desplazamientos virtuales que cumplen con las restricciones, entonces

$$F\delta q = 0. \quad (2.32)$$

Utilizando álgebra de matrices, F visto como vector es perpendicular al espacio nulo de la matriz $A(q)$, entonces F se encuentra en el espacio fila de esta matriz. Es decir, F es una combinación lineal de las filas de $A(q)$, precisamente

$$F = \lambda A(q), \quad (2.33)$$

donde $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ es un vector fila y los λ_j , con $j = 1, \dots, m$, son llamados multiplicadores de Lagrange.

Finalmente, las ecuaciones de movimiento se derivan de la asunción de que el sistema está descrito por un sistema holonómico (como el descrito en 2.1.4.2) sujeto a fuerzas de restricción, las cuales no hacen trabajo. A esta asunción se la denomina **principio no holonómico** [6]. Las ecuaciones resultantes son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} &= \lambda A(q), \\ A(q)\dot{q} &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Los multiplicadores de Lagrange del vector λ se determinan de forma semejante a la manera en que se resuelven problemas restringidos de máximo y mínimo en cálculo.

Las ecuaciones (2.34) resultan de imponer las restricciones de movimiento *luego* de tomar las variaciones. Este orden en la formulación de las ecuaciones es el que resulta en las ecuaciones correctas de la dinámica de un sistema no holonómico. La otra opción, imponer las restricciones de movimiento y luego tomar variaciones es lo que corresponde a un principio completamente variacional y el cual se utiliza en el área de control óptimo [6, 2].

Ejemplo 10. Considere un hombre y un perro moviéndose sobre el plano, como se muestra en la Figura 2.8. El hombre tiene posición inicial en el origen del sistema coordenado y se mueve sobre el eje y con velocidad constante c . El perro inicia su movimiento desde el punto (x_0, y_0) , $x_0 \geq 0$, $y_0 \neq 0$, en el mismo instante que el hombre y corre tal que la dirección de su velocidad en cada momento está dada por la línea que conecta su posición instantánea y la posición instantánea del hombre. El objetivo es encontrar las ecuaciones que describan la trayectoria del perro.

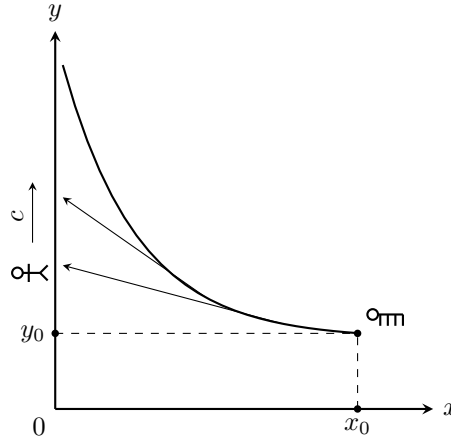


Figura 2.8: Un perro que persigue un hombre y las variables del sistema.

El lagrangiano del sistema es

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (2.35)$$

La restricción está dada por la condición que en cada instante la dirección del movimiento del perro es conocida, entonces el coeficiente angular de la trayectoria del perro cumple

$$\frac{dy}{dx} = G(t, x, y) \quad \implies \quad G(t, x, y)\dot{x} - \dot{y} = 0, \quad (2.36)$$

la cual es una condición reonómica (del inglés *rheonomic*), es decir, depende del tiempo t . La dirección instantánea del movimiento del perro en el tiempo t , posicionado en el punto (x, y) está dada por la línea que conecta este punto a $(0, ct)$, que es donde se encuentra el hombre en el momento t . De esta manera se determina que el coeficiente angular de la trayectoria del perro en el tiempo t , estando en el punto (x, y) se da por

$$G(t, x, y) = \frac{y - ct}{x}, \quad (2.37)$$

consecuentemente, la restricción no holonómica tiene la forma

$$\frac{y - ct}{x}\dot{x} - \dot{y} = 0. \quad (2.38)$$

Utilizando las ecuaciones (2.30) tenemos que

$$A(x, y) \cdot (\dot{x}, \dot{y})^T = 0, \quad (2.39)$$

que por la ecuación (2.38) cumple que

$$A(x, y) = \left(\frac{y - ct}{x}, -1 \right). \quad (2.40)$$

Finalmente, las ecuaciones de movimiento se obtienen de las ecuaciones (2.34), que resultan en

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= \lambda_1 \left(\frac{y - ct}{x} \right), \\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) &= \lambda_1(-1), \end{aligned} \quad (2.41)$$

que junto con la ecuación de restricción (2.38) dan un número suficiente de ecuaciones diferenciales para resolver las variables x, y, λ_1 . $\triangle$

2.1.4.5. Principio de Lagrange-d'Alembert para sistemas no conservativos con restricciones no holonómicas

En este caso, el Principio de Lagrange-d'Alembert es adaptado para incluir tanto las fuerzas de restricción, como las fuerzas externas no conservativas F^e al sistema, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \delta \int_a^b L(q, \dot{q}) dt + \int_a^b F^e \delta q dt &= 0, \\ A(q) \delta q &= 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde F^e representa la fuerza no conservativa y la ecuación $A(q) \delta q = 0$ restringe los posibles desplazamientos virtuales del sistema a aquellos que cumplan con las restricciones no holonómicas impuestas al sistema.

Entonces, las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} &= \sum_{j=1}^m \lambda_j A_i^j(q) + F_i^e \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \\ A(q) \dot{q} &= 0, \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde $A_i^j(q)$ es el elemento j, i de la matriz $A(q)$, y F_i^e la i -ésima componente de F^e .

Ejemplo 11. El péndulo de Foucault es un experimento para demostrar el movimiento de rotación de la Tierra. Consiste en un péndulo que oscila mientras que la Tierra rota bajo

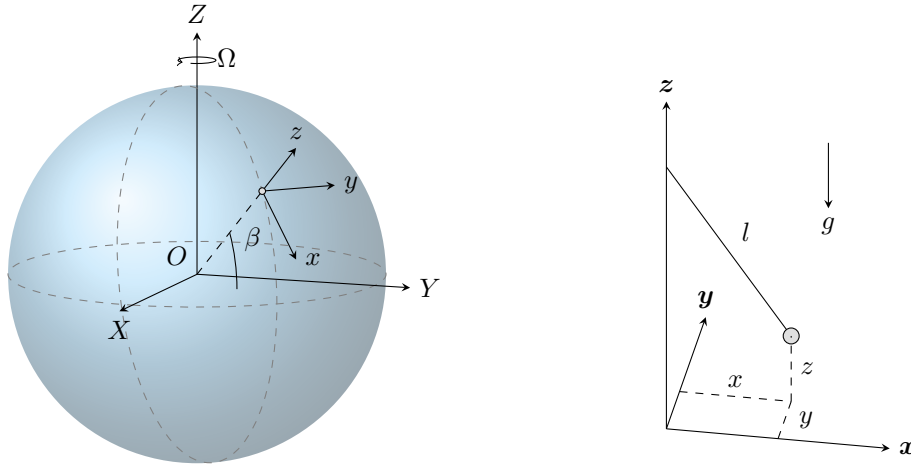


Figura 2.9: Péndulo de Foucault y sus ejes inerciales y no inerciales.

él, por tanto, el plano de oscilación del péndulo rota para el observador que se encuentra en la superficie terrestre. Por ejemplo, si el péndulo se encuentra en el punto máximo del Polo Norte, su plano de oscilación rotaría 360° en 24 horas para cualquier observador que se encuentra en este Polo. La velocidad angular de rotación del plano depende en la latitud sobre la cual se ubica el péndulo.

Para modelar este problema, considere un péndulo de longitud l y masa m sobre la latitud β sobre la superficie terrestre. Por un lado, el sistema inercial (X, Y, Z) es el que tiene su origen O fijo en el centro de la Tierra y cuyos ejes no se mueven con su movimiento de rotación, este último siendo representado por Ω . Como este es el sistema inercial, se desprecia el movimiento de traslación. Los ejes (X, Y) se encuentran en el plano determinado por la línea del Ecuador, mientras que el eje Z es el eje que apunta al Polo Norte. Por otro lado, para describir el movimiento del péndulo siendo observado desde la superficie terrestre se tiene un sistema no inercial el cual tiene su origen en la latitud β en el punto donde la masa del péndulo se encuentra en equilibrio, y se mueve con la rotación de la Tierra, con ejes (x, y, z) , donde x se encuentra sobre un meridiano en sentido norte-sur, y se encuentra en la dirección de la latitud β en sentido oeste-este y z está en el eje que apunta hacia arriba y el cual es perpendicular a la superficie terrestre. La configuración descrita se muestra en la Figura 2.9.

Debido a la velocidad angular Ω , el plano de oscilación del péndulo tiene una precesión relativa al sistema no inercial, el cual es $\omega_z = -2\pi \text{rad} \sin \beta / \text{día}$. Esto se da proyectando el vector de velocidad angular Ω sobre los ejes del sistema no inercial, lo cual resulta en $(-\Omega \cos \beta, 0, \Omega \sin \beta)$, pero como la Tierra rota en sentido antihorario visto desde arriba del eje Z , el plano de oscilación del péndulo rota en sentido horario visto desde arriba del eje z , por lo tanto el signo de la velocidad angular en el sistema no inercial es negativo.

Para una partícula en un sistema tridimensional con posición r y velocidad angular ω , se

cumple $\omega = \frac{r \times \dot{r}}{r^2}$ y como en este sistema $r = (x, y, z)$ y $\omega = (\Omega \cos \beta, 0, -\Omega \sin \beta)$, entonces

$$\begin{aligned}\Omega \cos \beta r^2 &= y\dot{z} - z\dot{y}, \\ 0 &= z\dot{x} - x\dot{z}, \\ -\Omega \sin \beta r^2 &= x\dot{y} - y\dot{x},\end{aligned}\tag{2.44}$$

donde la última ecuación establece la tasa de precesión de $-\Omega \sin \beta$ /día del plano de oscilación.

Como el péndulo forma un ángulo de oscilación pequeño ϕ en su movimiento ondulatorio, las coordenadas x, y son de orden $l\phi$, mientras que z es de orden $l\phi^2$ y por tanto despreciable. Así, podemos considerar el movimiento de la masa del péndulo en el plano $z = 0$ y tomar $q = (x, y)$ como las coordenadas generalizadas. Además, con la restricción holonómica $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$ se puede obtener z para cualesquiera x e y dados. Con estas consideraciones, la energía cinética

$$K(\dot{q}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\tag{2.45}$$

y la energía potencial

$$V(q) = \frac{1}{2}m\frac{g}{l}(x^2 + y^2),\tag{2.46}$$

mientras que la relación $\omega = \frac{r \times \dot{r}}{\|r\|^2}$ establece que

$$-y\dot{x} + x\dot{y} + \Omega \sin \beta(x^2 + y^2) = 0,\tag{2.47}$$

la cual es una restricción no holonómica para el sistema.

Adicionalmente se considera que el sistema está sujeta a una fuerza disipativa de Rayleigh, es decir, lineal en las velocidades.

Entonces, el lagrangiano de este sistema es $L(q, \dot{q}) = K(\dot{q}) - V(q)$, lo que de acuerdo con la derivación anterior resulta en

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\frac{g}{l}(x^2 + y^2),\tag{2.48}$$

sujeto a la restricción (2.47).

En este caso, la función de disipación se modela como una fuerza externa $F(q, \dot{q}) = -\alpha m \dot{q}$, en donde α es el parámetro de disipación.

Finalmente, las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange-d'Alembert para este sistema son

$$\begin{aligned}m\ddot{x} + m\frac{g}{l}x &= -\alpha m\dot{x} + \lambda_1(-y) \\ m\ddot{y} + m\frac{g}{l}y &= -\alpha m\dot{y} + \lambda_1(x) \\ -y\dot{x} + x\dot{y} + \Omega \sin \beta(x^2 + y^2) &= 0.\end{aligned}\tag{2.49}$$

△

2.1.4.6. Principio de Herglotz con restricciones no holonómicas

Como habíamos visto en 2.1.4.3, el principio de Herglotz es utilizado en el contexto de sistemas no conservativos y provee un mecanismo para especificar la disipación del sistema de forma intrínseca en el lagrangiano. Sin embargo, ese caso no abarca la situación en donde las ecuaciones de movimiento se encuentran restringidas por condiciones no holonómicas.

En un trabajo reciente [33], de Leon y colaboradores desarrollaron la descripción continua del principio de Herglotz con restricciones no holonómicas lineales en las velocidades, restringiendo apropiadamente las variaciones.

De forma análoga al caso no holonómico en el contexto del principio de Lagrange-d'Alembert, considere un sistema mecánico con espacio de configuraciones Q y lagrangiano $L: \mathbb{R} \times TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sujeto a m restricciones lineales en las velocidades. En una carta $(q, \dot{q})$ de TQ , estas restricciones se escriben como

$$A(q)\dot{q} = 0, \quad (2.50)$$

donde $A(q)$ es una matriz $m \times n$, con $m < n$, y $\dot{q} \in T_q Q$ es un vector columna. Estas restricciones pueden verse por un subconjunto de TQ dado por $\Delta := \{(q, \dot{q}) \in TQ \mid A(q)\dot{q} = 0\}$. Así, en cada punto q , consideramos el espacio nulo de la matriz $A(q)$ y lo denotamos por Δ_q . Consideremos además el conjunto $\Delta^\circ = \{(q, \dot{q}) \in TQ \mid \dot{q} \in C(A(q)^T)\}$, esto es, en cada punto q consideramos el espacio fila de la matriz $A(q)$, y lo denotamos por Δ_q° . En estas condiciones, se tiene el siguiente resultado [33].

Teorema 3. *Una curva $q(t) \in C^\infty([a, b], Q)$ satisface el principio variacional de Herglotz con restricciones no holonómicas lineales en las velocidades, si y solo si,*

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial L}{\partial z} &\in \Delta_q^\circ, \\ \dot{q} &\in \Delta_q. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Utilizando el Teorema 3 y las definiciones de los espacios Δ_q y Δ_q° , una curva $q(t)$ satisface el principio variacional de Herglotz con restricciones lineales en las velocidades, si y solo si, satisface las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial L}{\partial z} &= \sum_{j=1}^m \lambda_j A_i^j(q) \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \\ A(q)\dot{q} &= 0, \end{aligned} \quad (2.52)$$

para ciertos multiplicadores de Lagrange λ_j , con $j = 1, \dots, m$.

Ejemplo 12. Considere nuevamente el péndulo de Foucault, explicado en el Ejemplo 11. En el contexto del principio de Herglotz con restricciones, el lagrangiano de este sistema se escribe como

$$L(t, q, \dot{q}, z) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\frac{g}{l}(x^2 + y^2) - \alpha z. \quad (2.53)$$

Notemos que se incluye el parámetro de disipación de Rayleigh directamente, a diferencia del lagrangiano en el contexto del principio de Lagrange-d'Alembert. Como ya hemos visto, la tasa de rotación de este sistema se expresa en términos de la restricción no holonómica

$$-y\dot{x} + x\dot{y} + \Omega \sin \beta (x^2 + y^2) = 0.$$

Las ecuaciones de movimiento del péndulo de Foucault que se obtienen mediante la formulación de las ecuaciones de Herglotz con restricciones (2.52) son

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + m\frac{g}{l}x + \alpha m\dot{x} &= \lambda_1(-y) \\ m\ddot{y} + m\frac{g}{l}y + \alpha m\dot{y} &= \lambda_1(x) \\ -y\dot{x} + x\dot{y} + \Omega \sin \beta (x^2 + y^2) &= 0. \end{aligned} \tag{2.54}$$

△

Una vez más, las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico resultantes de dos principios diferentes son las mismas. En este caso, para el péndulo de Foucault con disipación de Rayleigh, específicamente los sistemas de ecuaciones (2.49) y (2.54), los cuales resultan de las aplicaciones del principio de Lagrange-d'Alembert con el principio no holonómico y del principio de Herglotz con restricciones, respectivamente. Sin embargo, la discretización utilizada para obtener los integradores da como resultado ecuaciones discretas diferentes para ambos principios aplicados a un mismo sistema mecánico, como veremos en la Sección 2.2.

Finalmente, a fin de sintetizar el estudio de los principios variacionales abarcados en esta Sección, en el Cuadro 2.1 se esquematizan los tipos de sistemas mecánicos discutidos y los principios variacionales correspondientes para obtener las ecuaciones correctas de su dinámica.

2.2. Integradores Geométricos

El flujo de las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento continuo de los sistemas mecánicos poseen ciertas propiedades *geométricas* que precisamente caracterizan este flujo y, en consecuencia, la naturaleza del movimiento de dichos sistemas.

Los **integradores geométricos** son métodos numéricos que preservan las propiedades geométricas del flujo de las ecuaciones diferenciales en su configuración discreta, la cual conforma el esquema numérico.

Por otra parte, las estructuras geométricas que surgen de las ecuaciones diferenciales dependen particularmente de la clase del problema a resolver. En el área de mecánica, los integradores geométricos se obtienen considerando el método numérico como un sistema mecánico discreto, el cual aproxima el flujo de las ecuaciones diferenciales del sistema mecánico considerado. Por tanto, el enfoque central consiste en *capturar la geometría del espacio*

	Holonómicos	No holonómicos
Conservativos	• Principio de Hamilton $\delta \int_a^b L(q, \dot{q}) dt = 0.$	• Principio de Lagrange-d'Alembert $\delta \int_a^b L(q, \dot{q}) dt = 0,$ $\sum_{k=1}^n a_k^j \delta q^k = 0.$
No conservativos	• Principio de Lagrange-d'Alembert $\delta \int_a^b L(q, \dot{q}) dt + \int_a^b F \delta q dt = 0.$ • Principio de Herglotz $\delta z(b) = 0.$	• Principio de Lagrange-d'Alembert $\delta \int_a^b L(q, \dot{q}) dt + \int_a^b F^e \delta q dt = 0,$ $\sum_{k=1}^n a_k^j \delta q^k = 0.$ • Principio de Herglotz con restricciones $\delta z(b) = 0,$ $\sum_{k=1}^n a_k^j \delta q^k = 0.$

Cuadro 2.1: Tipos de sistemas mecánicos y correspondientes principios variacionales para obtener sus ecuaciones de movimiento.

de estados del sistema continuo en el correspondiente integrador. Como consecuencia de la preservación de propiedades geométricas, los integradores geométricos logran conservar ciertas cantidades físicas que caracterizan al sistema integrado, como la energía en el caso de sistemas conservativos. Esto resulta en simulaciones de excelente comportamiento cualitativo y permiten tiempos más largos de simulación para el sistema considerado en comparación a métodos numéricos de propósito general.

En este contexto, una manera sistemática de obtener integradores geométricos consiste en discretizar la formulación variacional correspondiente para obtener las ecuaciones de movimiento. Esto está en marcada diferencia con respecto al enfoque de métodos numéricos tradicionales, los cuales se basan en discretizar directamente las ecuaciones diferenciales, sin considerar las propiedades geométricas subyacentes del flujo.

2.2.1. Integradores variacionales

El paradigma para obtener los integradores geométricos a partir de los principios variacionales consiste esencialmente en dos pasos. Primero, definir un **lagrangiano discreto** que corresponda a una versión discreta del lagrangiano continuo, el cual, como vimos en la Sección 2.1, codifica la dinámica del sistema. La construcción del lagrangiano discreto depende particularmente del principio variacional del cual se busca obtener su versión discreta, y su orden de aproximación determina el orden de precisión del integrador resultante. Segundo, el lagrangiano discreto es sometido a las operaciones de cálculo variacional que corresponden al principio variacional del cual se obtienen las ecuaciones de movimiento en el caso continuo.

2.2.1.1. Integrador basado en el principio de Hamilton

En el contexto de los integradores basados en el principio de Hamilton, se considera el espacio de configuraciones Q , donde la dinámica se traslada de TQ al *espacio de estados discreto* $Q \times Q$. Entonces, un lagrangiano discreto es un mapa $L_d: Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$, que se establece como una aproximación de la integral del lagrangiano $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ en un intervalo de tiempo $[t_j, t_{j+1}] \subset [a, b]$ por alguna regla de cuadratura,

$$L_d(q_j, q_{j+1}) \approx \int_{t_j}^{t_{j+1}} L(q, \dot{q}) dt, \quad (2.55)$$

es decir, L_d es en realidad una aproximación de la funcional de acción $S(q(t))$ en el intervalo $[t_j, t_{j+1}]$. En consecuencia, la acción discreta $S_d: Q^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$S_d(\{q_j\}_{j=0}^N) = \sum_{j=0}^{N-1} L_d(q_j, q_{j+1}) \approx S(q(t)), \quad (2.56)$$

donde $t_0 = a$, $N \in \mathbb{N}$ es tal que $t_N = b$ y $q: [a, b] \rightarrow Q$. Al conjunto $\{q_j\}_{j=0}^N$ se lo denomina *curva discreta* en Q .

El siguiente paso consiste en tomar la variación de la acción discreta $\delta S_d(\{q_j\}_{j=0}^N)$, de la misma forma que en el caso continuo, y la cual cumple $\delta S_d(\{q_j\}_{j=0}^N) = 0$ para una curva discreta que la extremiza. Entonces, utilizando reglas de cálculo variacional (ver 2.1.4.1 para un desarrollo análogo en el caso continuo),

$$\begin{aligned} \delta S_d(\{q_j\}_{j=0}^N) &= \delta \sum_{j=0}^{N-1} L_d(q_j, q_{j+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{\partial}{\partial q_j} L_d(q_j, q_{j+1}) \cdot \delta q_j + \frac{\partial}{\partial q_{j+1}} L_d(q_j, q_{j+1}) \cdot \delta q_{j+1} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} [D_1 L_d(q_j, q_{j+1}) \cdot \delta q_j + D_2 L_d(q_j, q_{j+1}) \cdot \delta q_{j+1}] = 0, \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde D_1 y D_2 son las derivadas parciales con respecto al primer y segundo argumentos, respectivamente. Utilizando la condición de que las variaciones de $\{q_j\}_{j=0}^N$ se toman con extremos fijos, tenemos que $\delta q_0 = \delta q_N = 0$, por tanto $D_1 L_d(q_0, q_1) \cdot \delta q_0$ y $D_2 L_d(q_{N-1}, q_N) \cdot \delta q_N$ son nulos, y reindexando términos de la sumatoria resulta

$$\begin{aligned} \delta S_d(\{q_j\}_{j=0}^N) &= \sum_{j=1}^{N-1} D_1 L_d(q_j, q_{j+1}) \cdot \delta q_j + \sum_{j=0}^{N-2} D_2 L_d(q_j, q_{j+1}) \cdot \delta q_{j+1} \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} [D_1 L_d(q_j, q_{j+1}) + D_2 L_d(q_{j-1}, q_j)] \cdot \delta q_j = 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Por el Lema 2, obtenemos entonces

$$D_1 L_d(q_j, q_{j+1}) + D_2 L_d(q_{j-1}, q_j) = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, N-1, \quad (2.59)$$

conocida como ecuación de **Euler-Lagrange Discreto** (ELD), y es precisamente la ecuación del integrador. Concretamente, sobre ciertas condiciones de regularidad, proporciona un mapa de **flujo discreto** $(q_{j-1}, q_j) \mapsto (q_j, q_{j+1})$. Es este flujo discreto el que preserva determinadas estructuras geométricas discretas, en forma paralela a como el flujo continuo preserva las correspondientes estructuras geométricas continuas.

Ejemplo 13. Considere el sistema del péndulo planar, expuesto en el Ejemplo 6, su lagrangiano es

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2 + m g l \cos q, \quad (2.60)$$

A fin de definir su lagrangiano discreto, podemos utilizar una aproximación gaussiana de un punto en el intervalo $[t_j, t_{j+1}]$, donde la velocidad se aproxima por $^2 \frac{q_{j+1} - q_j}{h}$, entonces

$$L_d(q_j, q_{j+1}) = h L \left(q_j, \frac{q_{j+1} - q_j}{h} \right) = h \left(\frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{h} \right)^2 + m g l \cos q_j \right). \quad (2.61)$$

Así,

$$\begin{aligned} D_1 L_d(q_j, q_{j+1}) &= -m l^2 \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{h} \right) - h m g l \sin q_j, \\ D_2 L_d(q_{j-1}, q_j) &= m l^2 \left(\frac{q_j - q_{j-1}}{h} \right), \end{aligned} \quad (2.62)$$

sumando con simplificaciones ambos lados derechos e igualando a 0,

$$\frac{q_{j+1} - q_j}{h} - \frac{q_j - q_{j-1}}{h} + h \frac{g}{l} \sin q_j = 0. \quad (2.63)$$

Finalmente, despejando q_{j+1} , obtenemos el integrador

$$q_{j+1} = q_j + h \left(\frac{q_j - q_{j-1}}{h} - h \frac{g}{l} \sin q_j \right). \quad (2.64)$$

Podemos expresar este mismo integrador en términos de las variables de estado. Para ello, observamos que en la ecuación (2.63), las expresiones $\frac{q_{j+1} - q_j}{h}$ y $\frac{q_j - q_{j-1}}{h}$ aproximan las velocidades, v_{j+1} y v_j . De esa forma, obtenemos el integrador

$$\begin{aligned} v_{j+1} &= v_j - h \frac{g}{l} \sin q_j \\ q_{j+1} &= q_j + h v_{j+1}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

²Como las funciones coordenadas φ_α de la variedad son 1 a 1, podemos identificar cualquier $q \in Q$ con $\varphi_\alpha(q) \in \mathbb{R}^n$, donde sí tiene sentido sumar.

para el problema del péndulo planar en términos de sus variables de estado. Este corresponde a un integrador simpléctico para el sistema del péndulo, ya que conserva la estructura simpléctica en el contexto discreto [44, 19, 40].

Como la definición del lagrangiano discreto (2.61) es una aproximación de primer orden, el integrador resultante (2.65) es un método de primer orden. Para un desarrollo más extenso con relación al orden de aproximación del lagrangiano discreto y del correspondiente integrador, ver los trabajos [38, 51, 11]. $\triangle$

A fin de contrastar los esquemas numéricos hasta ahora derivados consideremos el esquema de Euler explícito presentado en A.0.1 y el integrador geométrico de la ecuación (2.65) para el péndulo planar, el cual se describe en Ejemplo 6.

La ecuación del péndulo es

$$\ddot{q} = -\frac{g}{l} \sin q, \quad (2.66)$$

para utilizar el método de Euler explícito convertimos esta ecuación diferencial de orden dos en un sistema de ecuaciones de primer orden,

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = -\frac{g}{l} \sin q \end{cases} \quad (2.67)$$

y aplicamos la regla (A.13) para cada ecuación del sistema, entonces el integrador es

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= q_k + h v_k \\ v_{k+1} &= v_k - h \frac{g}{l} \sin q_k. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Los resultados de los integradores (2.68) y (2.65) se muestran en la Figura 2.10, en donde el tiempo de integración es $T = 10$ s y el tamaño de paso $h = 0,1$. Las condiciones iniciales $(q(0), \dot{q}(0)) = (\frac{\pi}{4}, 0)$ son las mismas para ambos integradores, sin embargo en el resultado de Euler explícito se observa que el sistema gana energía de forma espuria, mientras que el Euler simpléctico consigue capturar el movimiento periódico del péndulo, exhibiendo un comportamiento cualitativo apropiado.

2.2.1.2. Integrador basado en el principio de Lagrange-d'Alembert

Para la correspondiente discretización de las ecuaciones (2.22) se considera el mismo procedimiento que el seguido para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange discreto, en donde las fuerzas no conservativas discretas F_d se construyen tal que

$$F_d(q_j, q_{j+1}) \cdot (\delta q_j, \delta q_{j+1}) = F_d^-(q_j, q_{j+1}) \cdot \delta q_j + F_d^+(q_j, q_{j+1}) \cdot \delta q_{j+1}, \quad (2.69)$$

donde F_d^- y F_d^+ son las fuerzas externas que actúan sobre la derecha de q_j y la izquierda de q_{j+1} , respectivamente. Dicha construcción corresponde a la cuadratura de la fuerza continua $\int_{t_j}^{t_{j+1}} F \delta q dt$.

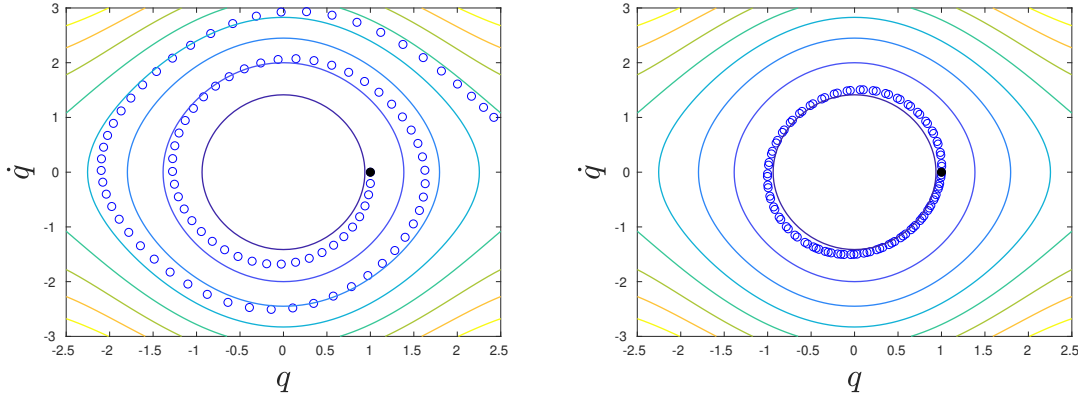


Figura 2.10: Resultado en espacio de estados de los integradores Euler explícito (izq.) y Euler simpléctico (der.). Los valores q y $\dot{q}$ se refieren a la posición y a la velocidad del sistema, respectivamente. Las líneas continuas representan la trayectoria de la solución real del sistema.

Entonces, utilizando la cuadratura de la fuerza como se establece en (2.69) la curva discreta $\{q_j\}_{j=0}^N$ debe cumplir

$$\delta S_d(\{q_j\}_{j=0}^N) + \sum_{j=0}^{N-1} [F_d^-(q_j, q_{j+1}) \cdot \delta q_j + F_d^+(q_j, q_{j+1}) \cdot \delta q_{j+1}] = 0, \quad (2.70)$$

para variaciones de $\{q_j\}_{j=0}^N$ con extremos fijos. Así, con la condiciones $\delta q_0 = \delta q_N = 0$ y reindexando, resultan las ecuaciones

$$D_1 L_d(q_j, q_{j+1}) + D_2 L_d(q_j, q_{j-1}) + F_d^-(q_j, q_{j+1}) + F_d^+(q_{j-1}, q_j) = 0, \quad (2.71)$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange discretas con fuerzas externas.

La definición de la discretización de la fuerza externa se puede establecer en términos de la discretización del lagrangiano. Por ejemplo, considere la discretización del lagrangiano como siendo

$$L_d(q_j, q_{j+1}) = hL\left((1-\alpha)q_j + \alpha q_{j+1}, \frac{q_{j+1} - q_j}{h}\right), \quad (2.72)$$

para $\alpha \in [0, 1]$. Entonces, una discretización natural para las fuerzas F_d^- y F_d^+ consiste en

$$\begin{aligned} F_d^-(q_j, q_{j+1}) &= (1-\alpha)hF\left((1-\alpha)q_j + \alpha q_{j+1}, \frac{q_{j+1} - q_j}{h}\right), \\ F_d^+(q_j, q_{j+1}) &= \alpha hF\left((1-\alpha)q_j + \alpha q_{j+1}, \frac{q_{j+1} - q_j}{h}\right). \end{aligned} \quad (2.73)$$

2.2.1.3. Integrador basado en el principio de Herglotz

El integrador obtenido a partir del principio variacional de Herglotz, que se muestra en la Definición 2.1.9, se denomina de contacto.

Teorema 4. [49], **Theorem 1.** *Para un tamaño de paso h suficientemente pequeño, la curva discreta q es una solución del principio variacional de Herglotz, con z definido por*

$$z_{j+1} - z_j = hL(q_j, q_{j+1}, z_j, z_{j+1}; h), \quad (2.74)$$

si y solo si satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange generalizadas discretas

$$D_1 L(q_j, q_{j+1}, z_j, z_{j+1}) + D_2 L(q_{j-1}, q_j, z_{j-1}, z_j) \frac{1 + hD_3 L(q_j, q_{j+1}, z_j, z_{j+1})}{1 - hD_4 L(q_{j-1}, q_j, z_{j-1}, z_j)} = 0, \quad (2.75)$$

donde D_i denota la derivada parcial con respecto al i -ésimo argumento.

La ecuación (2.75) es una discretización de las ecuaciones de Euler-Lagrange generalizadas, que son

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad (2.76)$$

las mismas expresiones que aparecen en el lado izquierdo de la primera ecuación del sistema (2.52).

En el trabajo de Vermeeren y colaboradores [49] se muestra que los integradores obtenidos mediante la formulación variacional de Herglotz, denominados integradores de contacto, resultan superiores que sus contrapartes obtenidas a partir de principio de Hamilton y sus adaptaciones para sistemas no conservativos, donde la dependencia del tiempo puede ser implícita o explícita.

Ejemplo 14. Considere el sistema del oscilador armónico amortiguado. Este sistema consiste de un oscilador armónico de masa m que está bajo la influencia de una fuerza de disipación de Rayleigh, la cual es proporcional a las velocidades, con parámetro de disipación α . Por simplicidad, en las aplicaciones $m = 1$.

Descripción de Lagrange-d'Alembert. En este contexto, el lagrangiano de este sistema se expresa como

$$L(q, \dot{q}) = K(\dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}mq^2, \quad (2.77)$$

donde q es el desplazamiento del punto de equilibrio. El amortiguamiento se modela como una fuerza externa $F(q, \dot{q}) = -\alpha m\dot{q}$.

Para la discretización utilizamos un lagrangiano discreto de orden lineal, y una correspondiente cuadratura de orden lineal para la fuerza externa $F(q, \dot{q})$,

$$F_d^-(q_j, q_{j+1}) = hF\left(q_j, \frac{q_{j+1} - q_j}{h}\right) \quad y \quad F_d^+(q_j, q_{j+1}) = 0. \quad (2.78)$$

Por tanto, las ecuaciones discretas de Euler-Lagrange con fuerzas externas, utilizando una formulación de posición-momento son

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{p_{j-1} - hq_{j-1}}{1 + \alpha} \\ q_j &= q_{j-1} + hp_j. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Descripción de Herglotz. En este contexto el lagrangiano que describe este sistema es

$$L(q, \dot{q}, z) = K(\dot{q}) - V(q) - \alpha z = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}mq^2 - \alpha z. \quad (2.80)$$

La formulación de posición-momento de las ecuaciones discretas de Herglotz son

$$\begin{aligned} q_j &= \left(1 - \frac{h^2}{2}\right) q_{j-1} + h(1 - h\alpha)p_{j-1} \\ p_j &= (1 - h\alpha)p_{j-1} - \frac{h}{2}(q_j + q_{j-1}). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Comparamos los comportamientos cualitativos y los errores relativos de los integradores (2.79) y (2.81). La solución de referencia es obtenida utilizando un método Leapfrog con un tamaño de paso diez veces mas chico que los integradores comparados. El código utilizado es una extensión del utilizado en el trabajo [49], en el cual agregamos nuestra implementación del integrador LA. Los resultados de las comparaciones se muestran en la Figura 2.11, en el cual probamos los integradores usando dos parámetros α . En ambos casos el integrador de contacto muestra un mejor comportamiento cualitativo y mucho menor error relativo que el integrador basado en el principio LA.

△

2.2.1.4. Integrador no holonómico basado en el principio de Lagrange-d'Alembert

En el trabajo de Cortés y Martínez [9], se construye el integrador no holonómico basado en el principio de Lagrange-d'Alembert. De la misma forma que para el principio variacional de Herglotz, para obtener las ecuaciones (2.52), se considera una distribución Δ sobre la variedad de configuración Q que establece las restricciones lineales en las velocidades para el sistema lagrangiano. La curva $q(t) \in Q$ satisface las restricciones si $\dot{q}(t) \in \Delta_{q(t)}$ para todo t . Si $\{\Phi^c = \Phi_i^c dq^i\}_{c=1}^m$ es un conjunto de funciones definiendo el aniquilador de Δ , se obtienen las ecuaciones describiendo la dinámica no holonómica

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \lambda_c \Phi_i^c, \\ \Phi_i^c \dot{q}^i = 0, \end{cases} \quad (2.82)$$

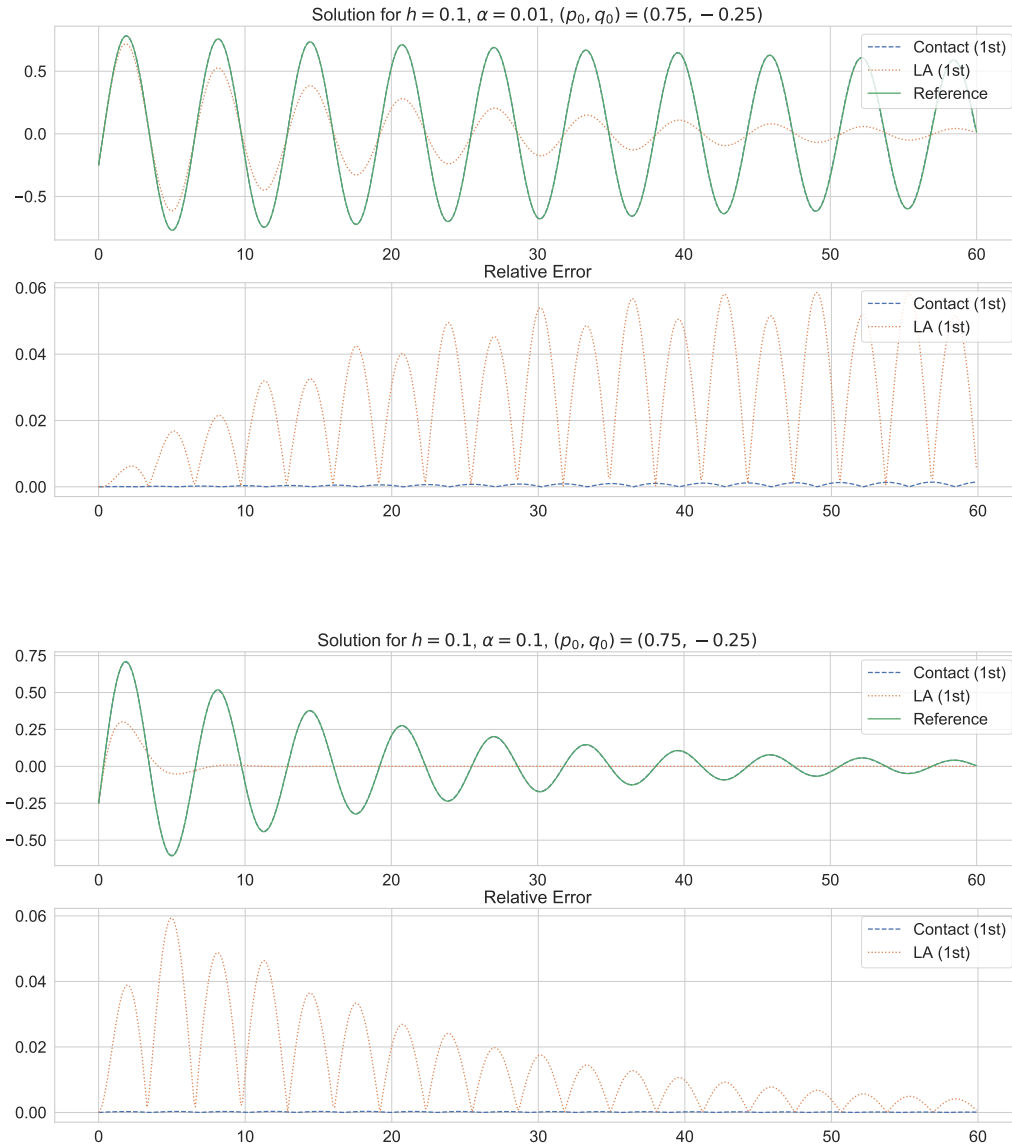


Figura 2.11: Simulación del oscilador armónico amortiguado con un parámetro de amortiguamiento α pequeño utilizando el integrador de contacto y el integrador basado en el principio LA. En las Soluciones, el eje x representa el tiempo en segundos y el eje y representa el desplazamiento del punto de equilibrio del oscilador, h es el tamaño de paso y (p_0, q_0) representan las condiciones iniciales de momento y posición, respectivamente.

donde λ_c , $c \in \{1, \dots, m\}$ es un conjunto de multiplicadores de Lagrange. El lado derecho de la primera ecuación del sistema (2.82) representa la fuerza de restricción.

Para derivar el integrador de la dinámica no holonómica, se necesita un espacio de restricción discreto $\Delta_d \subset Q \times Q$, es decir, el camino real discreto debe cumplir $\delta q_j \in \Delta_{q(t)}$ y $(q_j, q_{j+1}) \in \Delta_d$. Si $\Phi_d^c: Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones cuyos núcleos definen el espacio Δ_d , resulta el siguiente algoritmo

$$\begin{cases} D_1 L_d(q_j, q_{j+1}) + D_2 L_d(q_{j-1}, q_j) = \lambda_a \Phi^c(q_j) \\ \Phi_d^c(q_j, q_{j+1}) = 0. \end{cases} \quad (2.83)$$

2.2.1.5. Integrador no holonómico con fuerzas externas basado en el principio de Lagrange-d'Alembert

En este caso los principios variacionales discretos, de Lagrange-d'Alembert descrito en 2.2.1.2, y del integrador no holonómico descrito en 2.2.1.4 se combinan para obtener un integrador para sistemas mecánicos no conservativos con restricciones no holonómicas, basado en el principio de Lagrange-d'Alembert.

Las ecuaciones del integrador son

$$\begin{cases} D_1 L_d(q_j, q_{j+1}) + D_2 L_d(q_{j-1}, q_j) + F_d^-(q_j, q_{j+1}) + F_d^+(q_{j-1}, q_j) = \lambda_a \Phi^c(q_j) \\ \Phi_d^c(q_j, q_{j+1}) = 0. \end{cases} \quad (2.84)$$

En la ecuación (2.84) se puede observar que se incorporan tanto la cuadratura de las fuerzas externas, es decir, $F_d^-(q_j, q_{j+1})$ y $F_d^+(q_{j-1}, q_j)$ como las restricciones discretas $\Phi_d^c(q_j, q_{j+1}) = 0$.

Parte II

Contribuciones

Capítulo 3

Integrador de contacto con restricciones no holonómicas

The great discoveries of higher mathematics and their immediate application to nature imbued the philosophers of those days with an unbounded confidence in the fundamentally intellectual structure of the world.

— Cornelius Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*

El enfoque principal para obtener integradores geométricos basados en los principios variacionales consiste en traducir el espacio de la dinámica continua a un espacio discreto con geometría compatible. En otras palabras, describir un sistema mecánico discreto consistente con el modelo del sistema mecánico continuo.

A ese respecto, para construir nuestro integrador de contacto con restricciones no holonómicas, consideramos como base las estructuras discretas establecidas en la formulación del integrador de contacto de la ecuación (2.75), específicamente, el lagrangiano discreto, el espacio discreto sobre el cual está definido el lagrangiano discreto y las ecuaciones del principio variacional discreto. Sobre estas definiciones aplicamos las correspondientes restricciones de una manera compatible mediante un determinado mapa de discretización.

Entre los trabajos principales en relación a la construcción de este integrador y sus correspondientes contribuciones se pueden mencionar los siguientes. La teoría continua del principio variacional de Herglotz con restricciones no holonómicas lineales en las velocidades se desarrolló en un reciente trabajo por De León y colaboradores [33], y nuestro integrador se basa en discretizar esta descripción. Por otra parte, la discretización del principio variacional de Herglotz se estableció en el trabajo de Vermeeren y colaboradores [49]. Con respecto a la teoría de discretización de las restricciones, en el trabajo de Cortés y Martínez [9] se desarrolló la descripción discreta del principio de Lagrange-d'Alembert para sistemas no holonómicos, con restricciones lineales en las velocidades.

3.1. Distribución discreta

En el caso continuo, las restricciones no holonómicas lineales en las velocidades, $A(q)\dot{q}$, definen una distribución Δ sobre Q , en la cual se limita la dinámica del sistema y que se define como

$$\Delta := \{(q, \dot{q}) \in TQ \mid A(q)\dot{q} = 0\}.$$

Para imponer las restricciones no holonómicas en el sistema mecánico discreto, establecemos una distribución discreta Δ_d , el cual corresponde a un subconjunto del espacio de estados discreto $Q \times Q$ y que cumple $(q, q) \in \Delta_d$ para todo $q \in Q$, tal que todos los puntos de la variedad de configuración se encuentren en la distribución discreta. La idea corresponde a establecer un espacio tal que la curva discreta $\{q_j\}_{j=0}^N$ cumpla con la condición $(q_j, q_{j+1}) \in \Delta_d$ para $j = 0, \dots, N-1$.

A fin de definir las versiones discretas de las restricciones no holonómicas, utilizamos el mismo mapa de discretización que el utilizado en el lagrangiano. Como ejemplo, consideremos un lagrangiano en el contexto del principio variacional clásico $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$, la discretización L_d de este lagrangiano se da mediante un mapa de discretización $\Psi: Q \times Q \rightarrow TQ$ tal que se cumple $L_d = L \circ \Psi$. Con este mismo mapa Ψ , definimos las restricciones no holonómicas discretas, de la siguiente forma. Sea $(q_d, \dot{q}_d)$ el punto en TQ que corresponde a la imagen de (q_j, q_{j+1}) por el mapa Ψ , entonces definimos el mapa de restricción discreta como $A_d(q_j, q_{j+1}) = A(q_d)\dot{q}_d$, por tanto,

$$\Delta_d := \{(q_j, q_{j+1}) \in Q \times Q \mid A_d(q_j, q_{j+1}) = 0\}. \quad (3.1)$$

Como las variaciones de la curva discreta $\{q_j\}_{j=0}^N$ se toman con extremos fijos, es decir $\delta q_0 = \delta q_N = 0$ y las variaciones de cada punto q_j de la curva discreta deben respetar $A(q_j)\delta q_j = 0$, con esta idea definimos el conjunto

$$\Delta_d^\circ := \{(q_j, q_{j+1}) \in Q \times Q \mid \dot{q}_d \in C(A(q_j)^T)\}, \quad (3.2)$$

esto es, en cada punto q_j de la curva discreta $\{q_j\}_{j=0}^N$ consideramos el espacio fila de la matriz $A(q_j)$, y lo denotamos por $(\Delta_d^\circ)_{q_j}$.

3.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange discretas generalizadas con restricciones no holonómicas

Sea $L_d: Q^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ el lagrangiano discreto en el contexto del principio variacional de Herglotz, este lagrangiano es una aproximación consistente del lagrangiano continuo, a diferencia del lagrangiano discreto del principio variacional clásico, donde el lagrangiano discreto se define como una cuadratura de la acción en un intervalo de tiempo $[t_j, t_{j+1}]$.

Siguiendo de la teoría del caso continuo, las ecuaciones de Euler-Lagrange generalizadas discretas deben cumplir

$$D_1 L_d(q_j, q_{j+1}, z_j, z_{j+1}) + D_2 L_d(q_{j-1}, q_j, z_{j-1}, z_j) \frac{1 + hD_3 L_d(q_j, q_{j+1}, z_j, z_{j+1})}{1 - hD_4 L_d(q_{j-1}, q_j, z_{j-1}, z_j)} \in (\Delta_d^\circ)_{q_j}, \quad (3.3)$$

$$(q_j, q_{j+1}) \in \Delta_d.$$

Entonces, las ecuaciones de Euler-Lagrange generalizadas discretas con restricciones no holonómicas lineales en las velocidades son

$$D_1 L_d(q_j, q_{j+1}, z_j, z_{j+1}) + D_2 L_d(q_{j-1}, q_j, z_{j-1}, z_j) \frac{1 + hD_3 L_d(q_j, q_{j+1}, z_j, z_{j+1})}{1 - hD_4 L_d(q_{j-1}, q_j, z_{j-1}, z_j)} = \lambda A(q_j),$$

$$A_d(q_j, q_{j+1}) = 0, \quad (3.4)$$

las cuales corresponden a las ecuaciones de un integrador de contacto con restricciones no holonómicas lineales en las velocidades.

Capítulo 4

Resultados

The sober, practical, matter-of-fact nineteenth century—which carries over into our day—suspected all speculative and interpretative tendencies as “metaphysical” and limited its programme to the pure description of natural events.

— Cornelius Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*

En este capítulo presentamos los resultados numéricos obtenidos con el integrador de contacto con restricciones no holonómicas formulado en el Capítulo 3.

El integrador propuesto es aplicado a dos sistemas mecánicos de interés. El primero es el péndulo de Foucault con disipación de Rayleigh, explicado en el Ejemplo 11, el cual es un sistema con restricciones afines a las velocidades. Modelamos este sistema mediante las formulaciones de Lagrange-d’Alembert junto con el principio no holonómico y la formulación de Herglotz con restricciones, obteniendo el correspondiente integrador de cada formulación. El segundo es el disco rodante que cae, que corresponde a un sistema arquetípico en el contexto de sistemas no holonómicos con restricciones lineales en las velocidades. A este sistema agregamos disipación de Rayleigh y fuerzas externas y lo modelamos mediante la formulación del principio de Herglotz con restricciones para obtener su integrador.

Finalmente, los resultados numéricos correspondientes a los integradores de contacto para cada sistema se contrastan contra otros integradores, tanto geométricos como de propósito general.

4.1. Péndulo de Foucault

4.1.1. Descripción de Lagrange-d’Alembert

En este caso el lagrangiano se toma como siendo $L(q, \dot{q}, z) = K(\dot{q}) - V(q)$, el cual, como hemos visto en el Ejemplo 11, el lagrangiano del Péndulo de Foucault es resulta en

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\frac{g}{l}(x^2 + y^2), \quad (4.1)$$

también sujeta a la restricción no holonómica (2.47).

Para obtener el integrador en este caso utilizamos la ecuación (2.83) con una cuadratura de orden lineal para el lagrangiano y la fuerza externa, mientras que la restricción discreta se obtiene utilizando el mapa de discretización Ψ en la ecuación (2.47). Las ecuaciones resultantes del integrador LA son

$$\begin{aligned} \frac{-x_{j+1} + 2x_j - x_{j-1}}{h} - h\frac{g}{l}x_j - \alpha(x_{j+1} - x_j) + \lambda_1\frac{y_j}{m} &= 0 \\ \frac{-y_{j+1} + 2y_j - y_{j-1}}{h} - h\frac{g}{l}y_j - \alpha(y_{j+1} - y_j) - \lambda_1\frac{x_j}{m} &= 0 \\ -y_j\frac{x_{j+1} - x_j}{h} + x_j\frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \Omega \sin \beta(x_j^2 + y_j^2) &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde λ_1 es un multiplicador de Lagrange.

4.1.2. Descripción de Herglotz

En este caso el lagrangiano se toma como $L(q, \dot{q}, z) = K(\dot{q}) - V(q) - \alpha z$, el cual, como hemos visto en el Ejemplo 12, resulta en

$$L(q, \dot{q}, z) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\frac{g}{l}(x^2 + y^2) - \alpha z, \quad (4.3)$$

también sujeta a la restricción no holonómica (2.47).

Para obtener el integrador de contacto para este sistema utilizamos una aproximación de orden lineal en las ecuaciones (3.4), específicamente,

$$z_{j+1} - z_j = hL(x_j, x_{j+1}, z_j, z_{j+1}), \quad (4.4)$$

entonces, el lagrangiano discreto para derivar un integrador de orden lineal (depende solo de z_j y no de z_{j+1}) es

$$\begin{aligned} L(q_j, q_{j+1}, z_j, z_{j+1}) &= \frac{m}{2} \left(\left(\frac{x_{j+1} - x_j}{h} \right)^2 + \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h} \right)^2 \right) \\ &\quad - \frac{mg}{4l} (x_j^2 + x_{j+1}^2 + y_j^2 + y_{j+1}^2) - \alpha z_j. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aplicando las ecuaciones del integrador de contacto (3.4) al lagrangiano discreto (4.5), y

discretizando la restricción (2.47), obtenemos:

$$\begin{aligned}
D_1 L(q_j, q_{j+1}, z_j, z_{j+1}) &= \left(m \left(\frac{x_j - x_{j+1}}{h^2} \right) - \frac{mg}{2l} x_j, m \left(\frac{y_j - y_{j+1}}{h^2} \right) - \frac{mg}{2l} y_j \right), \\
D_2 L(q_{j-1}, q_j, z_{j-1}, z_j) &= \left(m \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{h^2} \right) - \frac{mg}{2l} x_j, m \left(\frac{y_j - y_{j-1}}{h^2} \right) - \frac{mg}{2l} y_j \right), \\
D_3 L(q_j, q_{j+1}, z_j, z_{j+1}) &= -\alpha, \\
D_4 L(q_{j-1}, q_j, z_{j-1}, z_j) &= 0, \\
\lambda_c \Phi^c &= \lambda_1 (-y_j, x_j), \\
\Phi_d^c(q_j, q_{j+1}) &= -y_j \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{h} \right) + x_j \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h} \right) - \omega_3 (x_j^2 + y_j^2) = 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

De esta manera, las ecuaciones resultantes del integrador son

$$\begin{aligned}
\frac{-x_{j+1} + 2x_j - x_{j-1}}{h^2} - \frac{g}{l} x_j - \alpha \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{h} - \frac{h}{2} \frac{g}{l} x_j \right) &= -\lambda_1 \frac{y_j}{m} \\
\frac{-y_{j+1} + 2y_j - y_{j-1}}{h^2} - \frac{g}{l} y_j - \alpha \left(\frac{y_j - y_{j-1}}{h} - \frac{h}{2} \frac{g}{l} y_j \right) &= \lambda_1 \frac{x_j}{m} \\
-y_j \frac{x_{j+1} - x_j}{h} + x_j \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \Omega \sin \beta (x_j^2 + y_j^2) &= 0,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

donde λ_1 es un multiplicador de Lagrange.

Como se puede notar, la discretización de la restricción es la misma para los integradores LA y de contacto con restricciones.

Los resultados de la comparación de ambos integradores se muestran en la Figuras 4.1 y 4.2, donde la solución de referencia fue obtenida mediante el método Runge-Kutta-Fehlberg de orden 4, y en los cuales ponemos a prueba los integradores utilizando dos parámetros de amortiguamiento α , para un péndulo de Foucault con la configuración del experimento original de 1851 en el Observatorio de París, donde $m = 28$ kg, $l = 67$ m, latitud $\beta = 49^\circ$.

Para las configuraciones de los integradores LA y de contacto con restricciones, el tamaño de paso $h = 0,1$, oscilando por un tiempo de 3600 s.

Para las gráficas correspondientes a las funciones de energía y error de trayectoria se utilizan los últimos 100 segundos de la integración, específicamente, el intervalo [3500 3600] segundos. Esto, debido a que lo interesante en el contexto de los integradores geométricos es ver qué ocurre después de mucho tiempo en la simulación.

4.1.3. Análisis de resultados

4.1.3.1. Experimento 1

En el primer caso, que se muestra en la Figura 4.1, la disipación es $\alpha = 1e - 3$ y ambos integradores muestran un comportamiento indistinguible en términos de disipación

de energía y trayectoria de la masa del péndulo. Sin embargo, en este caso, el integrador LA tiene un mejor comportamiento en términos del error de la trayectoria del péndulo con respecto a la solución de referencia, donde este error se define como $\|q_{t_j} - q_{ref}(t_j)\|_2$, siendo q_{t_j} la aproximación producida por el integrador y $q_{ref}(t_j)$ la solución de referencia, ambas en el tiempo t_j .

4.1.3.2. Experimento 2

En el segundo caso, que se muestra en la Figura 4.2 de manera a modelar un péndulo más realista con fricción por resistencia del aire, decrementamos el valor del parámetro de disipación a $\alpha = 1e - 4$ para una segunda simulación. En este caso el integrador LA muestra un comportamiento anómalo, donde la energía del sistema disminuye espuriamente y el plano de oscilación cambia de dirección de una manera discontinua en un momento dado, mientras que el integrador de contacto, con los mismos parámetros no sufre de estas anomalías, demostrando un buen comportamiento cualitativo, en términos de error de trayectoria y energía con respecto a la solución de referencia.

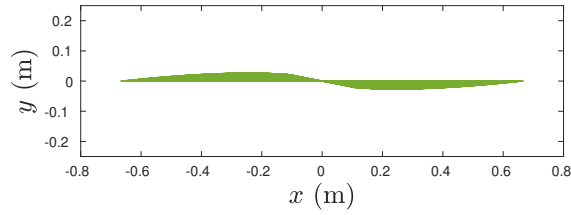
4.2. Disco rodante que cae

El disco que rueda sin deslizarse es un sistema arquetípico en el contexto de sistemas no holonómicos [6, 41]. Consiste en un disco homogéneo que rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal y en donde se considera que el disco puede caer sobre cualquiera de sus costados. Para la derivación del lagrangiano se sigue la formulación propuesta por Paris y Zhang [43]. El espacio de configuraciones del sistema es $Q = \mathbb{R}^2 \times SO(3)$ con coordenadas generalizadas $q = (X, Y, \theta, \phi, \psi)$, en donde $SO(3)$ es el grupo de rotaciones 3D ortogonales que preservan orientación. El par (X, Y) indica la proyección del centro del disco sobre el plano horizontal, y los ángulos θ, ϕ, ψ describen la posición angular del disco de manera euleriana, en donde los ejes del disco son x, y, z , con y permaneciendo paralelo a la superficie, como se muestra en la Figura 4.3.

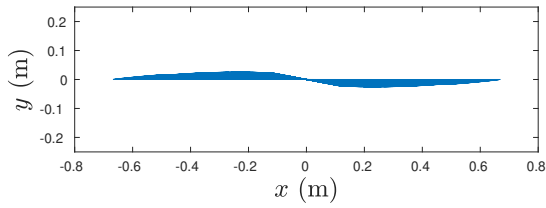
En el contexto de Lagrange-d'Alembert, el lagrangiano para este sistema es $L = T - V$, donde T y V son la energía cinética y potencial, respectivamente. En este caso la energía cinética es la translacional más la rotacional, entonces

$$T = \frac{1}{2}m\hat{v}^2 + \frac{1}{2}[I_A\omega_x^2 + I_T(\omega_y^2 + \omega_z^2)], \quad (4.8)$$

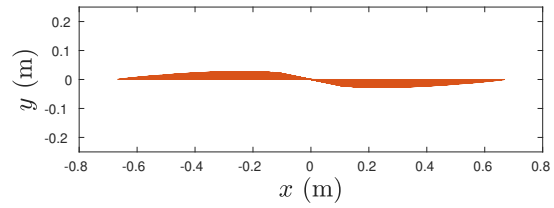
donde $\hat{v}$ es la velocidad del centro del disco, I_A e I_T son los momentos de inercia con respecto al eje x y los ejes y y z , respectivamente y ω_i es la velocidad angular con respecto al eje i . En términos de las velocidades de los ángulos de Euler, tenemos las siguientes expresiones



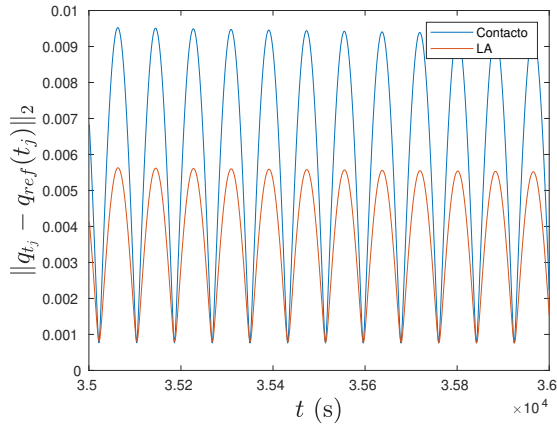
(a) Referencia (RKF45)



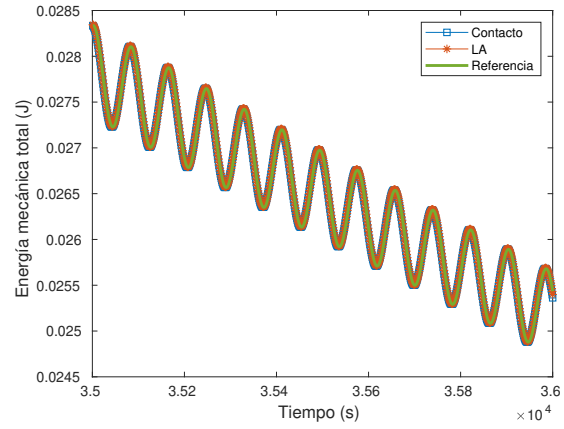
(b) Contacto (orden 1)



(c) LA (orden 1)

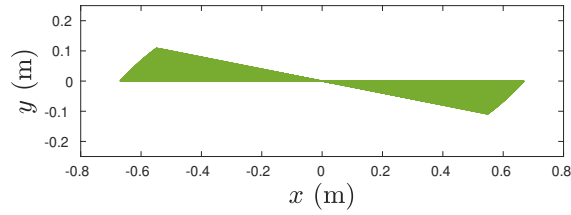


(d) Error de la trayectoria

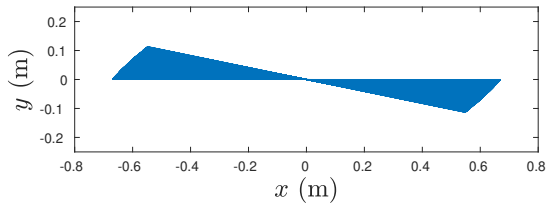


(e) Energía

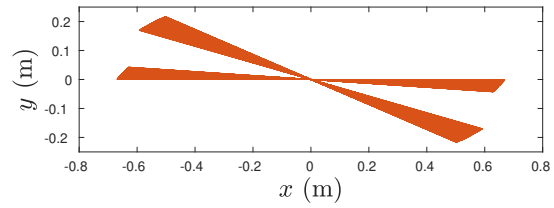
Figura 4.1: Experimento 1 del péndulo de Foucault, con condiciones iniciales $q(0) = (0, l/100)$, $\dot{q}(0) = (0, 0)$. Parámetro de disipación $\alpha = 1e - 3$.



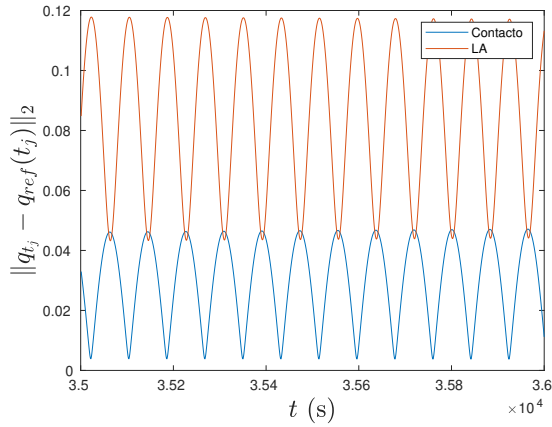
(a) Referencia (RKF45)



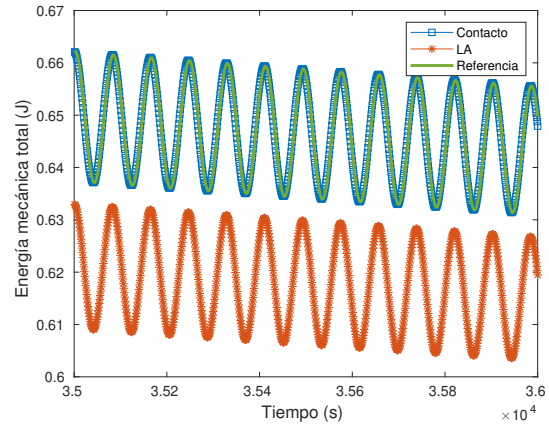
(b) Contacto (orden 1)



(c) LA (orden 1)



(d) Error de la trayectoria



(e) Energía

Figura 4.2: Experimento 2 del péndulo de Foucault, con condiciones iniciales $q(0) = (0, l/100)$, $\dot{q}(0) = (0, 0)$. Parámetro de disipación $\alpha = 1e - 4$.

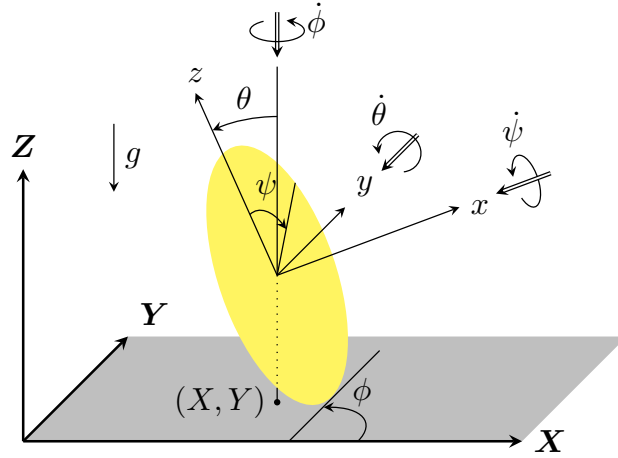


Figura 4.3: Disco rodante que cae y sus variables de estado.

para las velocidades angulares:

$$\begin{aligned}\omega_x &= -\dot{\psi} + \dot{\phi} \sin \theta, \\ \omega_y &= -\dot{\theta}, \\ \omega_z &= \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Por otra parte, la energía potencial es

$$V = mgR \cos \theta.\tag{4.10}$$

Entonces, el lagrangiano completo es

$$\begin{aligned}L = T(\dot{q}) - V(q) &= \frac{1}{2}m[\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + R^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2] \\ &+ \frac{1}{2} \left[I_A (\dot{\psi} - \dot{\phi} \sin \theta)^2 + I_T (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta) \right] - mgR \cos \theta.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Las restricciones de no deslizamiento son

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -R \cos \theta \sin \phi \dot{\theta} - R \sin \theta \cos \phi \dot{\phi} + R \cos \phi \dot{\psi}, \\ \dot{Y} &= R \cos \theta \cos \phi \dot{\theta} - R \sin \theta \sin \phi \dot{\phi} + R \sin \phi \dot{\psi}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

4.2.1. Descripción de Herglotz

En el contexto del principio variacional de Herglotz, introducimos una disipación de Rayleigh y fuerzas externas, por lo que el lagrangiano para el sistema es

$$L(t, q, \dot{q}, z) = T(\dot{q}) - V(q) - \alpha z + F(t)q,\tag{4.13}$$

donde α es el parámetro de disipación y F son las fuerzas externas. Las restricciones son las mismas que en el contexto del principio de Lagrange-d'Alembert (Ver ecuación 4.12).

El integrador de contacto con restricciones de orden 2 resultante para este sistema mecánico consiste en un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales que se obtienen a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange generalizado discreto (3.4) y el cual resolvemos utilizando el método de Newton-Raphson modificado multivariado. En este caso, no escribimos el sistema de ecuaciones discretas a causa de la extensión del mismo. De todas formas, para obtener las ecuaciones discretas se puede seguir el mismo procedimiento que el que se encuentra en la Subsección 4.1.2, pero en este caso utilizando el lagrangiano discreto del disco que cae.

A fin de probar el integrador propuesto, comparamos sus soluciones contra el integrador ode15i de MATLAB, el cual es un integrador de orden variable para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales implícitas. Las soluciones de referencia se obtuvieron también con el método ode15i de MATLAB, pero con un tamaño de paso 10 veces más pequeño en relación al tamaño de paso utilizado para el integrador propuesto.

Para todos los experimentos, los parámetros físicos del sistema son: $m = 5$ kg, $R = 0,5$ m, $I_A = \frac{1}{2}mR^2$ kgm², $I_T = \frac{1}{4}mR^2$ kgm², $g = 9,81$ m/s², y los parámetros numéricos, $h = 0,1$ y la tolerancia $1e - 6$, tanto para el método de Newton-Raphson modificado multivariado como para el método ode15i. Con estas configuraciones ejecutamos cuatro conjuntos de experimentos que corresponden a ciertas condiciones iniciales del disco, y en cada conjunto variamos el parámetro de disipación α . En cada caso, como las condiciones iniciales deben ser consistentes, utilizamos la función decic de MATLAB, fijando los parámetros que indicamos en la descripción de cada conjunto de experimentos.

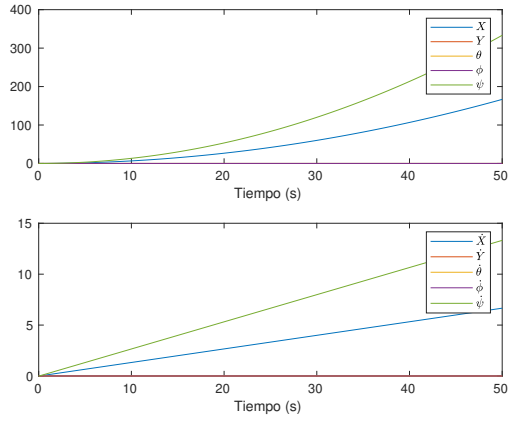
4.2.2. Análisis de resultados

4.2.2.1. Experimento 1

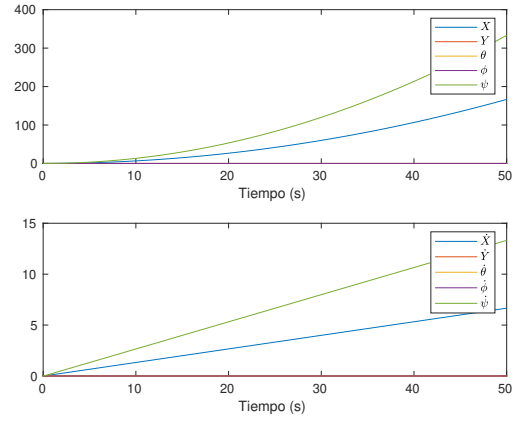
El primer conjunto de experimentos consiste en el disco que comienza en posición vertical y una fuerza $F^\psi = \frac{1}{2}$ N lo hace girar. La Figura 4.4 corresponde al sistema sin disipación, la Figura 4.5 corresponde al sistema con disipación $\alpha = 0,005$ y la Figura 4.6 al sistema con disipación $\alpha = 0,1$.

4.2.2.2. Experimento 2

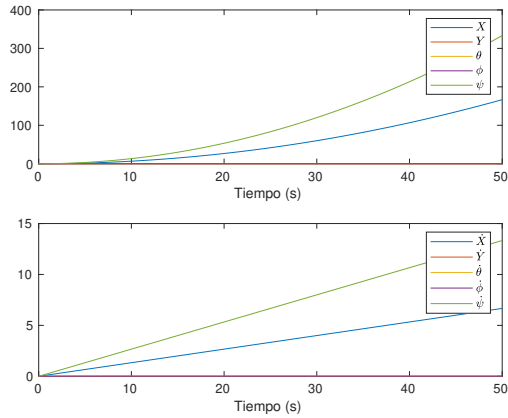
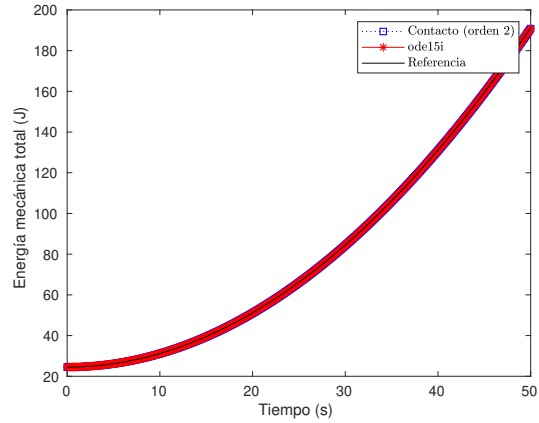
El segundo conjunto de experimentos consiste en el disco que comienza en posición inclinada con ángulo inicial $\theta_0 = \frac{\pi}{36}$ rad y velocidad inicial de giro $\dot{\psi}_0 = 2\pi$. La Figura 4.7 corresponde al sistema sin disipación, la Figura 4.8 corresponde al sistema con disipación $\alpha = 0,005$ y la Figura 4.9 al sistema con disipación $\alpha = 0,1$. En el caso con $\alpha = 0,1$ se puede observar que el integrador ode15i falla en la integración en $t \approx 10,9$ s, mientras que el integrador de contacto consigue integrar el sistema durante todo el tiempo establecido.



(a) Contacto (orden 2)

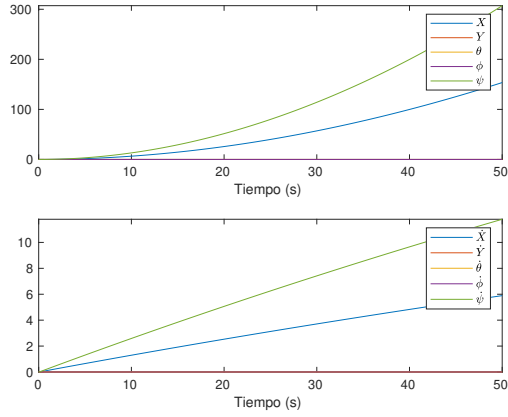


(b) ode15i (orden variable)

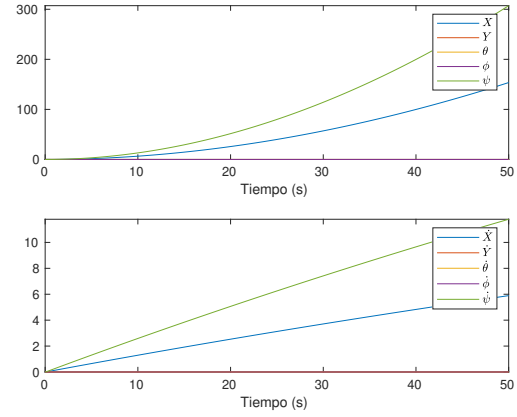
(c) Referencia (ode15i, $h = 0,01$)

(d) Energía

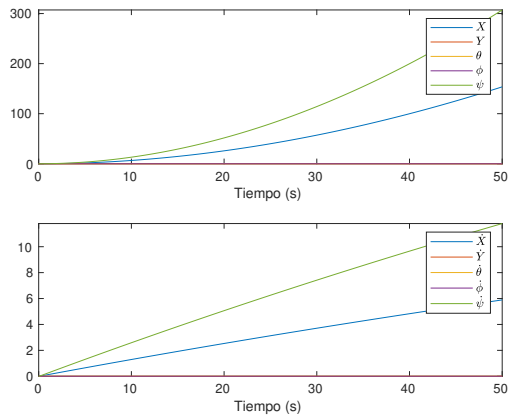
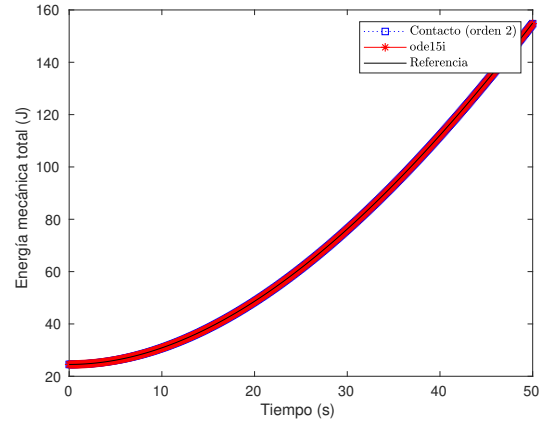
Figura 4.4: Experimento 1.1 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$. Disipación $\alpha = 0$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 1/2)$.



(a) Contacto (orden 2)

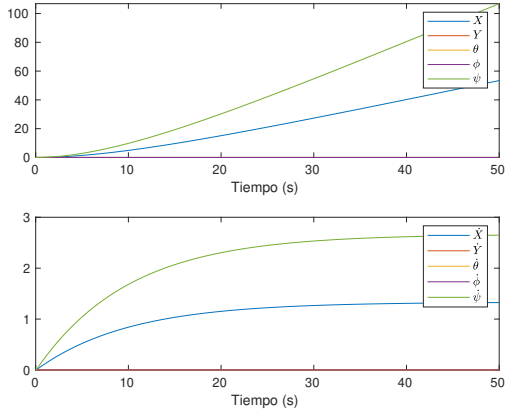


(b) ode15i (orden variable)

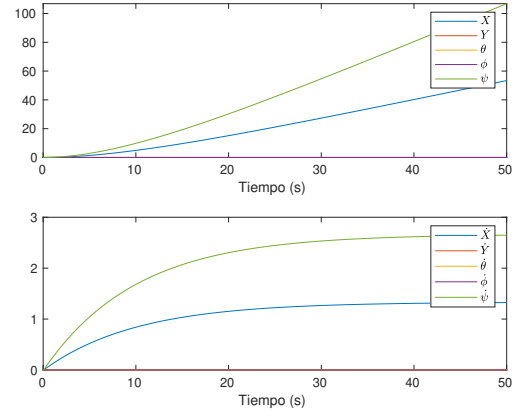
(c) Referencia (ode15i, $h = 0,01$)

(d) Energía

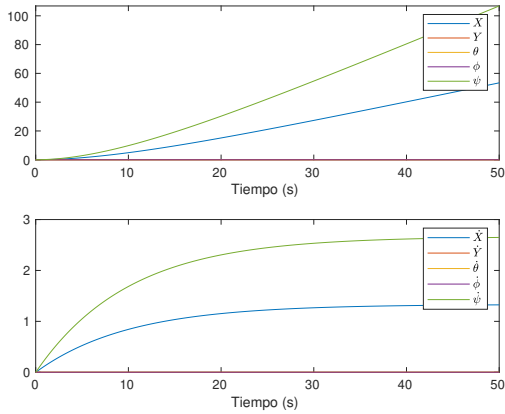
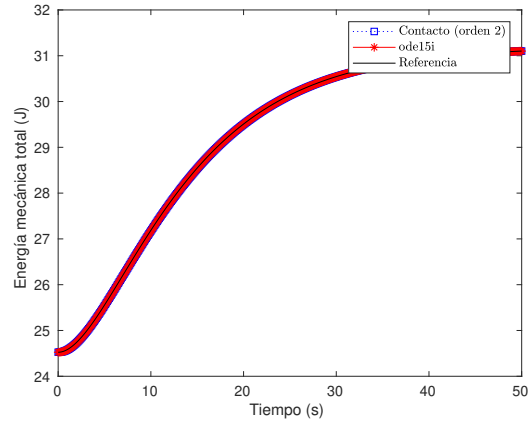
Figura 4.5: Experimento 1.2 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$. Disipación $\alpha = 0,005$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 1/2)$.



(a) Contacto (orden 2)

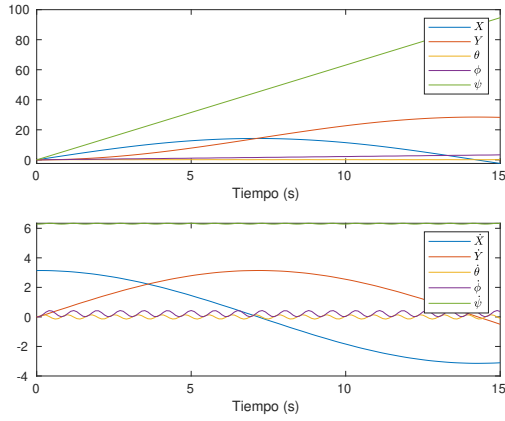


(b) ode15i (orden variable)

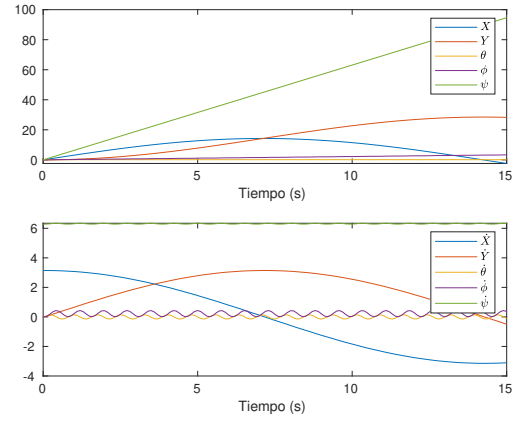
(c) Referencia (ode15i, $h = 0,01$)

(d) Energía

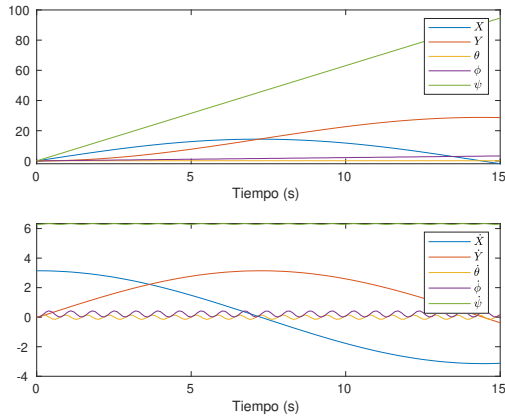
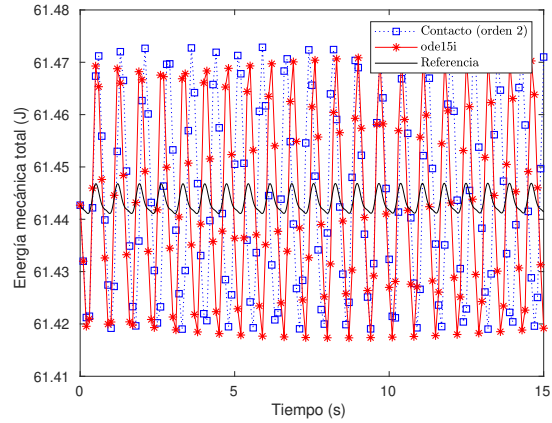
Figura 4.6: Experimento 1.3 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$. Disipación $\alpha = 0,1$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 1/2)$.



(a) Contacto (orden 2)

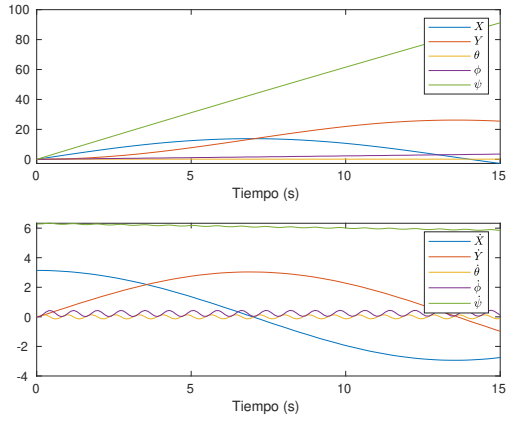


(b) ode15i (orden variable)

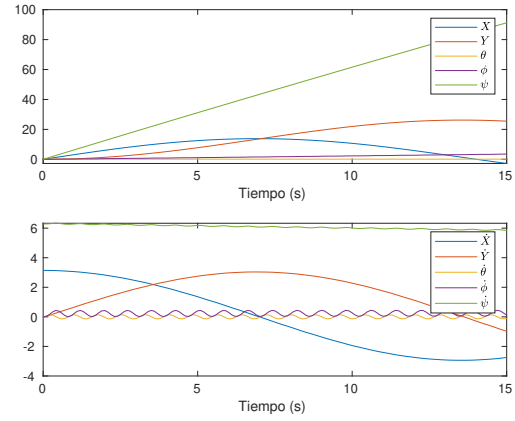
(c) Referencia (ode15i, $h = 0,01$)

(d) Energía

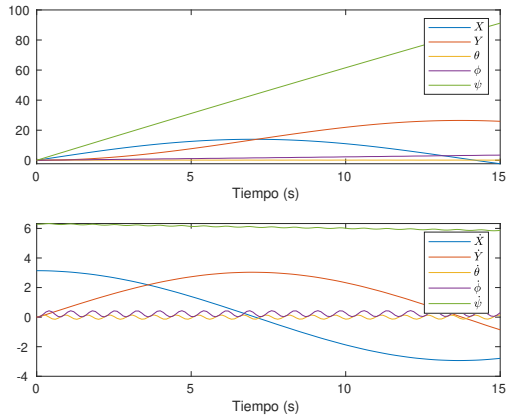
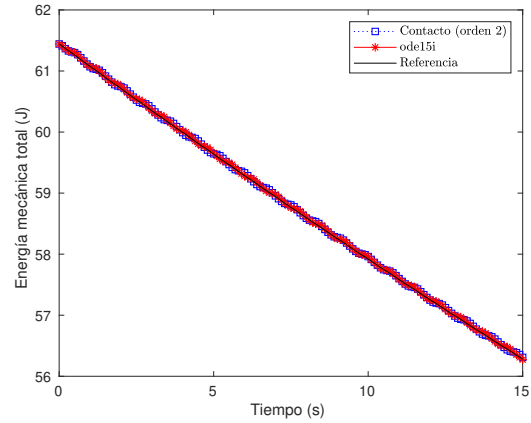
Figura 4.7: Experimento 2.1 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, \pi/36, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi, 0, 0, 0, 2\pi)$. Disipación $\alpha = 0$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 0)$.



(a) Contacto (orden 2)

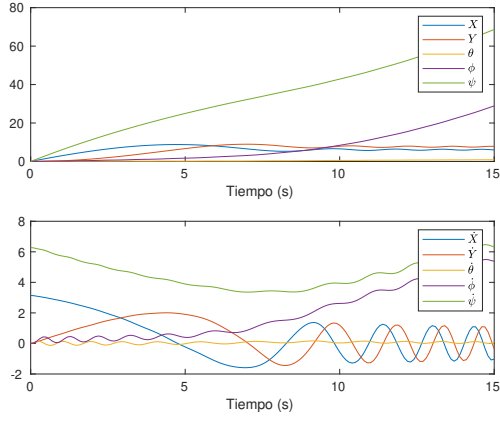


(b) ode15i (orden variable)

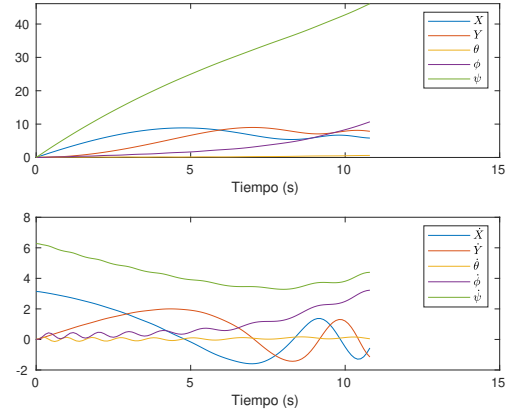
(c) Referencia (ode15i, $h = 0,01$)

(d) Energía

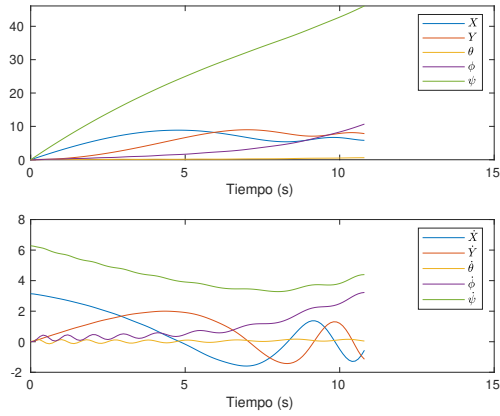
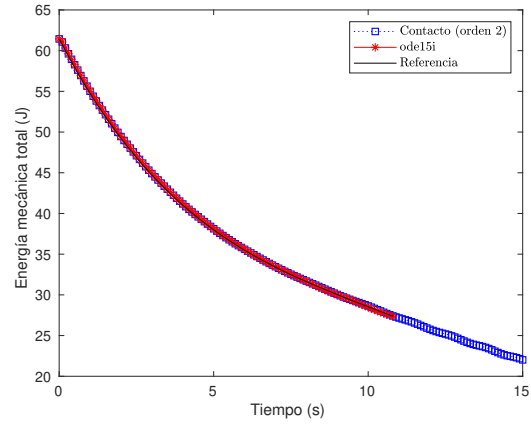
Figura 4.8: Experimento 2.2 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, \pi/36, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi, 0, 0, 0, 2\pi)$. Disipación $\alpha = 0,005$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 0)$.



(a) Contacto (orden 2)



(b) ode15i (orden variable)

(c) Referencia (ode15i, $h = 0,01$)

(d) Energía

Figura 4.9: Experimento 2.3 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, \pi/36, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi, 0, 0, 0, 2\pi)$. Disipación $\alpha = 0,1$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

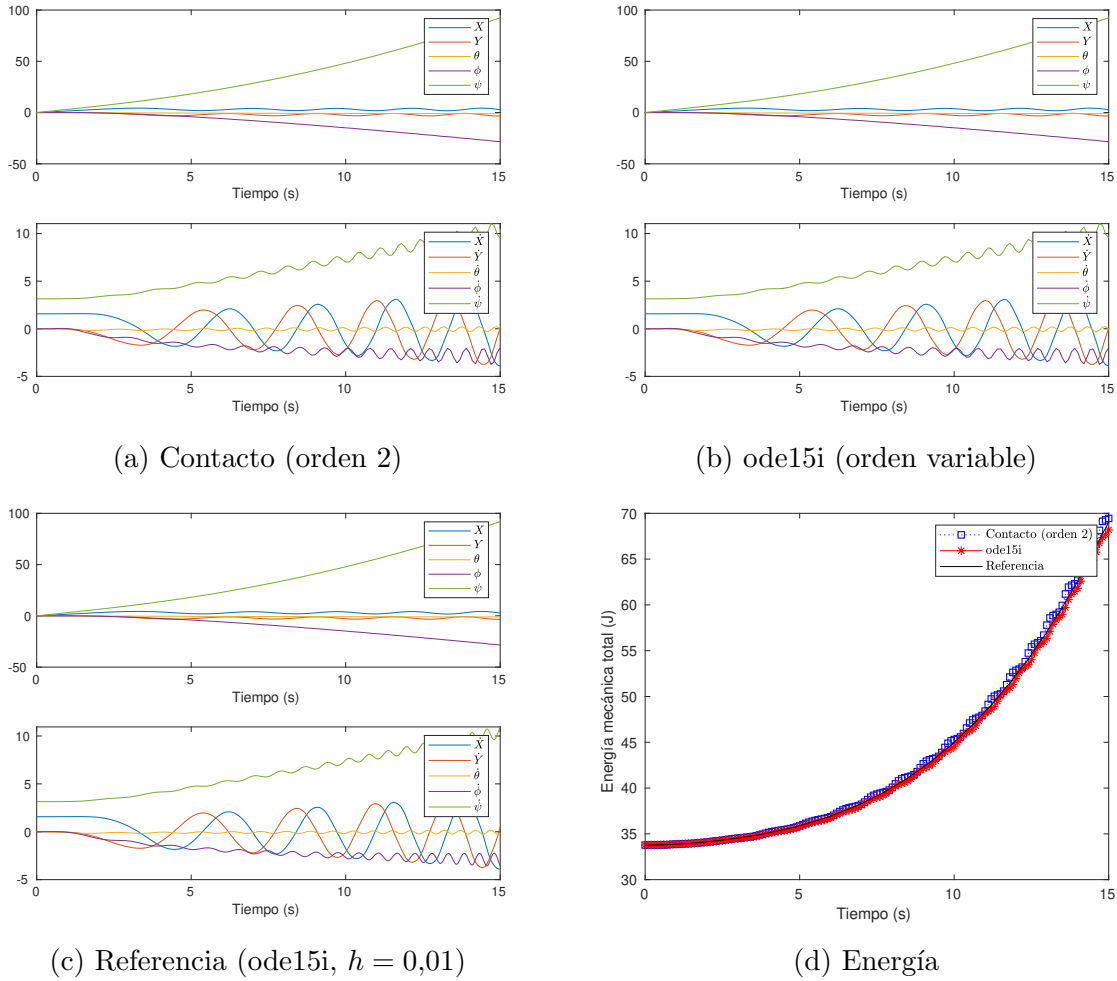
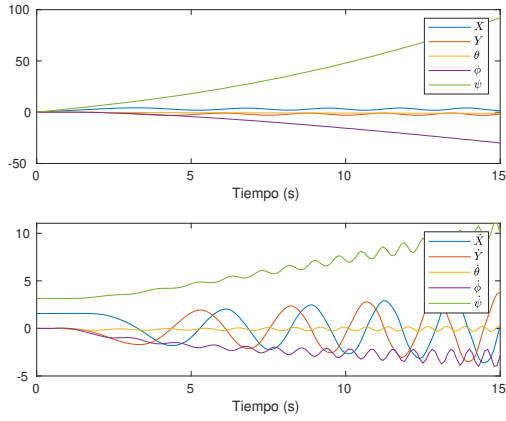


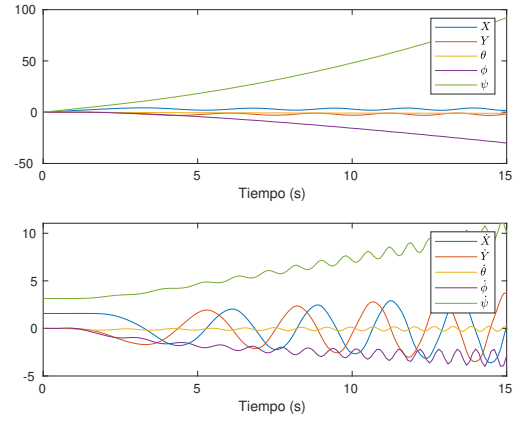
Figura 4.10: Experimento 3.1 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi/2, 0, 0, 0, \pi)$. Disipación $\alpha = 0$ y $F(t) = (0, 0, 0, t/16, t/16)$.

4.2.2.3. Experimento 3

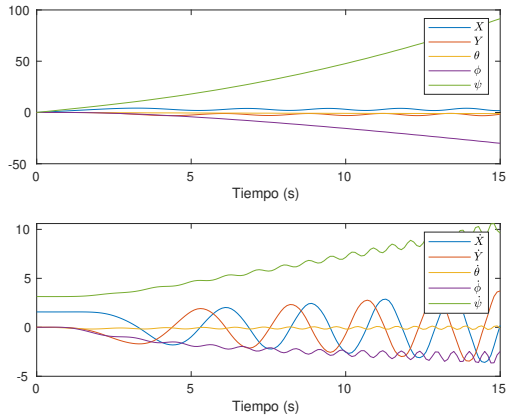
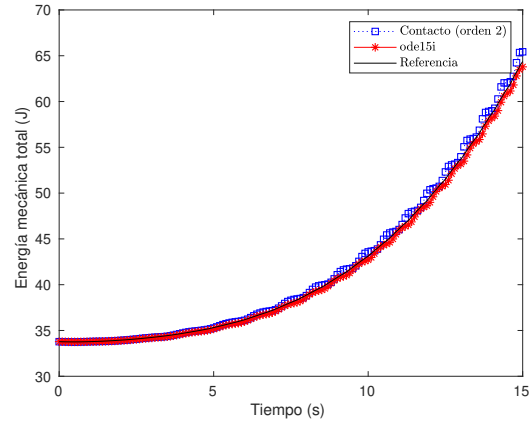
El tercer conjunto de experimentos consiste en el disco que comienza en posición vertical y velocidad inicial de giro $\psi_0 = \pi$. Adicionalmente se introducen dos fuerzas $F^\phi = \frac{t}{16}$ N y $F^\psi = \frac{t}{16}$ N, de cambio de dirección y de giro, respectivamente. La Figura 4.7 corresponde al sistema sin disipación, la Figura 4.8 corresponde al sistema con disipación $\alpha = 0,005$ y la Figura 4.9 al sistema con disipación $\alpha = 0,1$.



(a) Contacto (orden 2)



(b) ode15i (orden variable)

(c) Referencia (ode15i, $h = 0,01$)

(d) Energía

Figura 4.11: Experimento 3.2 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi/2, 0, 0, 0, \pi)$. Disipación $\alpha = 0,005$ y $F(t) = (0, 0, 0, t/16, t/16)$.

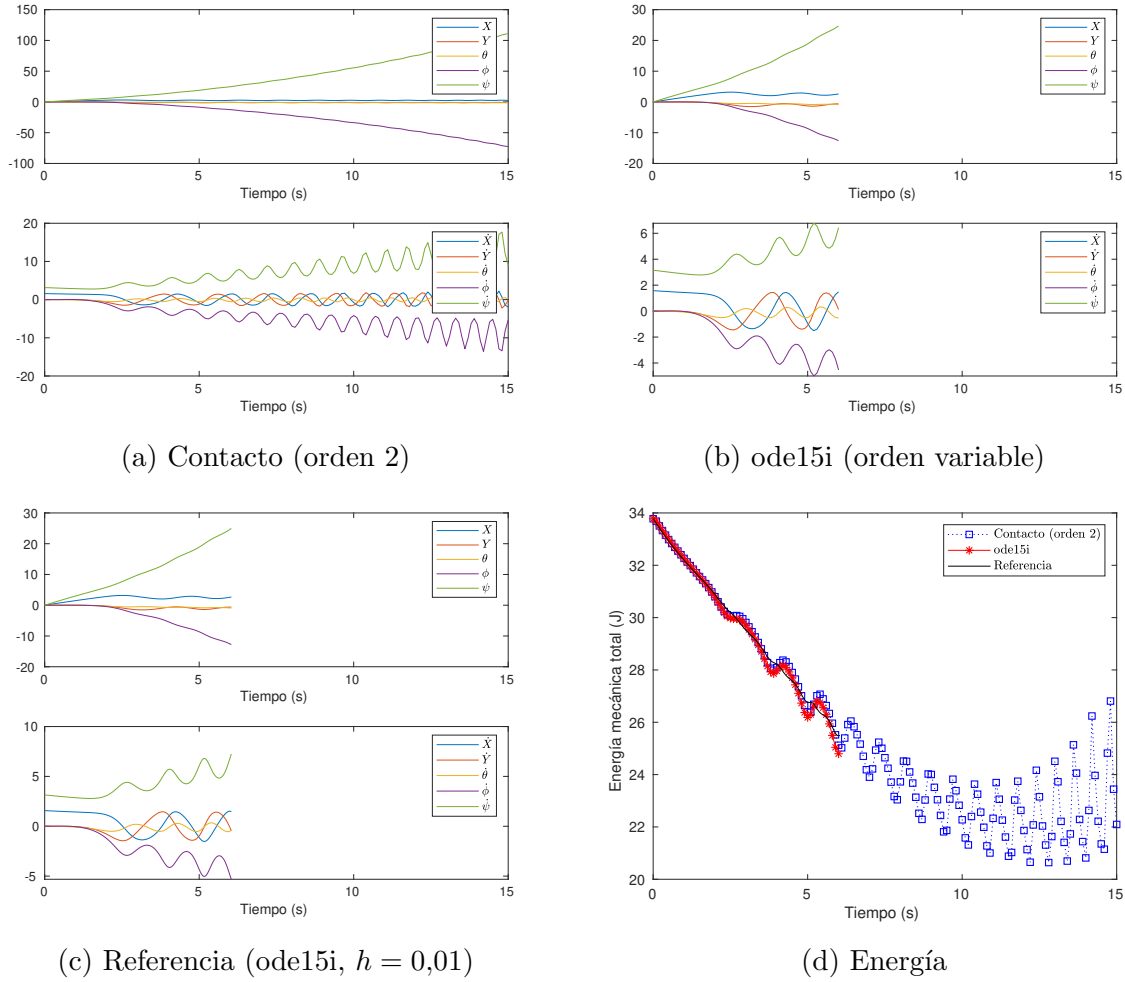


Figura 4.12: Experimento 3.3 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi/2, 0, 0, 0, \pi)$. Disipación $\alpha = 0,1$ y $F(t) = (0, 0, 0, t/16, t/16)$.

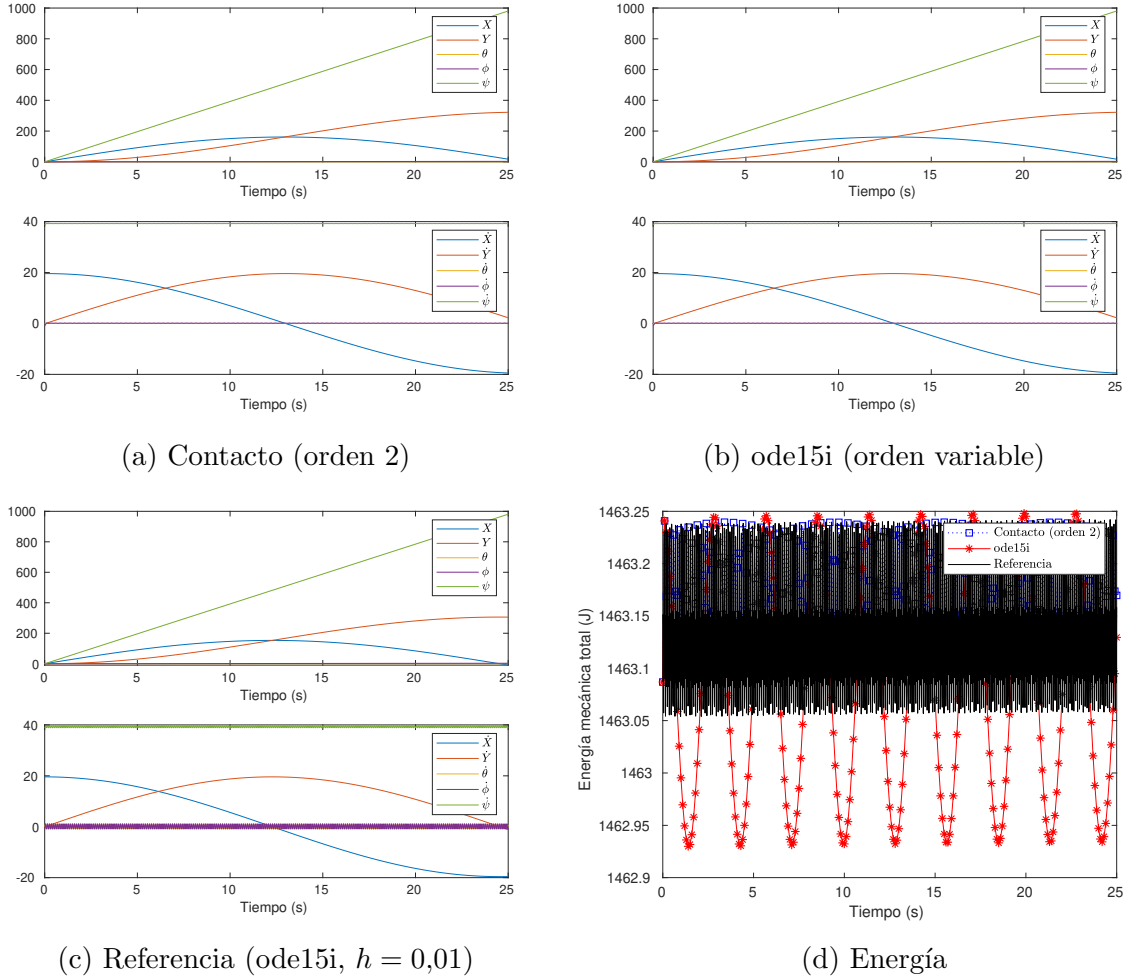


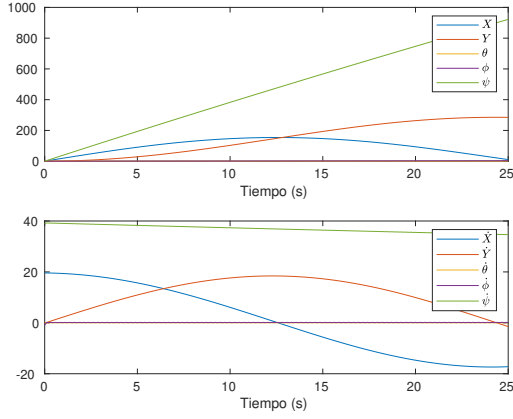
Figura 4.13: Experimento 4.1 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 20\pi/180, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi/2, 0, 0, -3\pi/10, \dot{\psi}_0)$, con $\dot{\psi}_0 = ((I_T - I_A - mR^2) \sin(\theta_0) \dot{\phi}_0^2 - mgR) / ((I_A + mR^2) \tan(\theta_0) \dot{\phi}_0)$. Disipación $\alpha = 0$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

4.2.2.4. Experimento 4

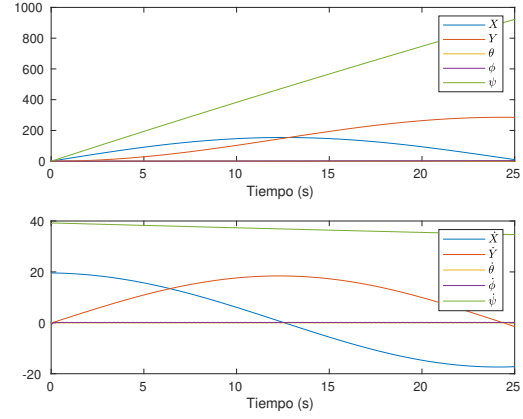
El cuarto conjunto de experimentos consiste en el disco que se mueve de forma estable en un camino circular. Este movimiento es posible si su ángulo de inclinación $\theta = \theta_0$, velocidad de precesión $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$ y velocidad de giro $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$ son constantes y satisfacen,

$$(I_T - I_A - mR^2) \sin(\theta_0) \dot{\phi}_0^2 - (I_A + mR^2) \tan(\theta_0) \dot{\phi}_0 \dot{\psi}_0 - mgR = 0. \quad (4.14)$$

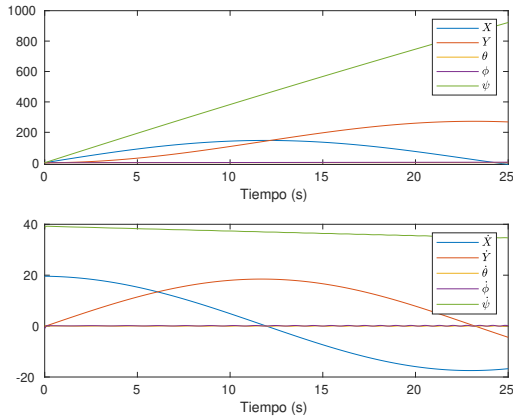
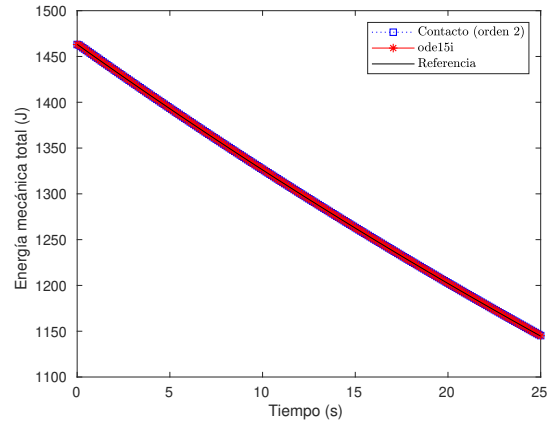
La Figura 4.7 corresponde al sistema sin disipación, la Figura 4.8 corresponde al sistema con disipación $\alpha = 0,005$ y la Figura 4.9 al sistema con disipación $\alpha = 0,1$.



(a) Contacto (orden 2)

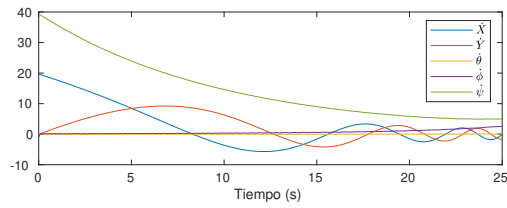
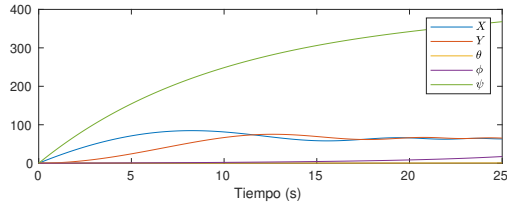


(b) ode15i (orden variable)

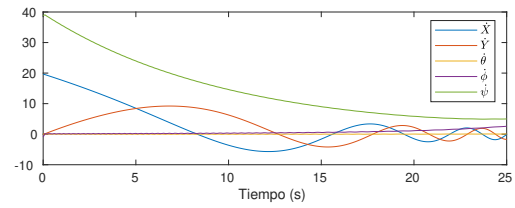
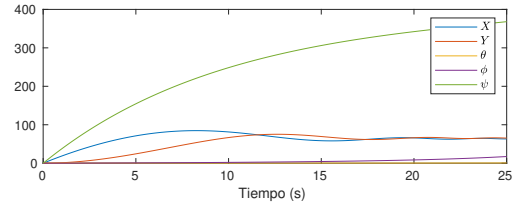
(c) Referencia (ode15i, $h = 0,01$)

(d) Energía

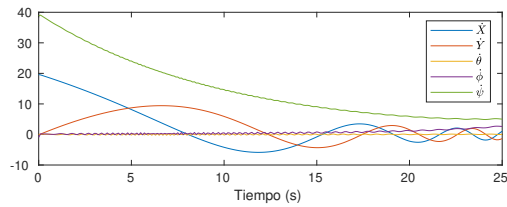
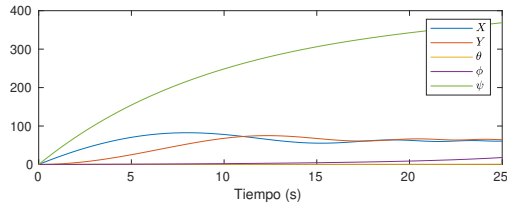
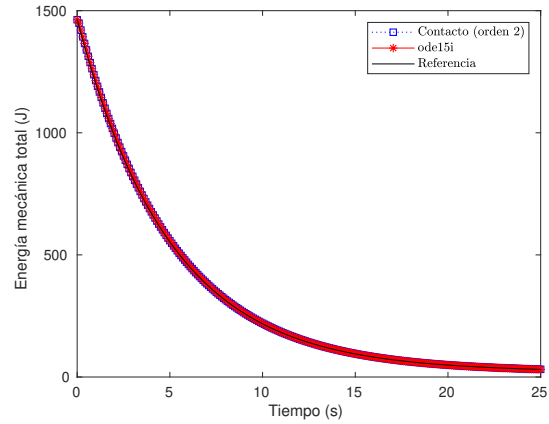
Figura 4.14: Experimento 4.2 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 20\pi/180, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi/2, 0, 0, -3\pi/10, \dot{\psi}_0)$, con $\dot{\psi}_0 = ((I_T - I_A - mR^2) \sin(\theta_0) \dot{\phi}_0^2 - mgR) / ((I_A + mR^2) \tan(\theta_0) \dot{\phi}_0)$. Disipación $\alpha = 0,005$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 0)$.



(a) Contacto (orden 2)



(b) ode15i (orden variable)

(c) Referencia (ode15i, $h = 0,01$)

(d) Energía

Figura 4.15: Experimento 4.3 del disco rodante que cae con condiciones iniciales $q(0) = (0, 0, 20\pi/180, 0, 0)$, $\dot{q}(0) = (\pi/2, 0, 0, -3\pi/10, \dot{\psi}_0)$, con $\dot{\psi}_0 = ((I_T - I_A - mR^2) \sin(\theta_0) \dot{\phi}_0^2 - mgR) / ((I_A + mR^2) \tan(\theta_0) \dot{\phi}_0)$. Disipación $\alpha = 0,1$ y $F(t) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

Capítulo 5

Conclusiones

However, philosophical trends float back and forth and the last word is never spoken.

— Cornelius Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*

El integrador de contacto con restricciones no holonómicas propuesto muestra un adecuado comportamiento cualitativo para los sistemas simulados, tanto de primer orden como segundo orden de precisión. Adicionalmente, el integrador propuesto funciona en casos donde el integrador ode15i, no puede continuar con la integración. Este resultado ocurre en el contexto de la simulación del disco rodante que cae para ciertas condiciones iniciales y fuerzas externas.

Sin embargo, los tiempos de ejecución para el integrador de contacto con restricciones no holonómicas fueron considerablemente superiores a los tiempos de ejecución del integrador ode15i. Esto se debe, pero no se limita a, las siguientes razones. Por un lado, la implementación de la rutina ode15i es propia de MATLAB y por tanto se encuentra optimizada para esta plataforma. Por otra parte, la implementación del integrador de contacto propuesto realiza llamadas a una implementación particular del método de Newton-Raphson modificado multivariado para resolver el sistema de ecuaciones correspondiente a cada iteración de este integrador.

Considerando la diferencia en tiempos de ejecución, uno de los principales motivos para utilizar el integrador de contacto propuesto por sobre integradores tradicionales como ode15i consiste en el caso de integrar un sistema mecánico por largo tiempo. Esto, para conservar las características del sistema mecánico a través del tiempo, que es una propiedad de los integradores geométricos en general, y en vista a lo que puede ocurrir con integradores tradicionales, como el fallo de ode15i en el caso particular del disco que cae. Con relación al fallo del integrador, notemos que no ocurre ninguno en la integración del péndulo de Foucault con disipación de Rayleigh, que consiste en un sistema mecánico más simple que el disco rodante que cae. Por tanto, una posible causa de que el integrador ode15i no pueda continuar con la integración es la mayor complejidad del sistema del disco rodante, en contraste a otros sistemas de ecuaciones diferenciales en general, y en particular a sistemas mecánicos más simples, como el trineo de Chaplygin o el péndulo de Foucault.

A pesar de que el integrador de contacto no holonómico propuesto se obtuvo a partir de la discretización de la formulación continua del principio variacional de Herglotz con restricciones cuya correctitud está establecida, hace falta un análisis formal de error para este integrador, debido a que incorpora las restricciones discretas a diferencia de la discretización del principio de Herglotz sin restricciones. En base a estas consideraciones, apuntamos algunas líneas para trabajos futuros:

- Análisis de error para el integrador de contacto con restricciones no holonómicas propuesto. Entre los posibles análisis se indican el de preservación de la función de energía y preservación del mapa de momento no holonómico, entre otros análisis encontrados en la literatura para integradores no holonómicos.
- *Backward error analysis* (BEA) en clases de sistemas no holonómicos para los cuales este análisis puede ser aplicado. El BEA es una herramienta para el estudio del comportamiento a largo plazo de integradores numéricos, el cual es la herramienta de elección en el caso holonómico, debido a que su teoría es para sistemas integrables de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por otra parte, este análisis no es en general aplicable al caso no holonómico por la no integrabilidad que lo caracteriza. Sin embargo, existen sistemas no holonómicos para los cuales el BEA puede ser aplicado, como los sistemas no holonómicamente acoplados, que se muestran en Modin y Verdier [41].
- Aplicación del integrador de contacto con restricciones no holonómicas a otros sistemas no holonómicos relevantes. Adicionalmente, considerando fuerzas de control.

Bibliografía

- [1] Ralph Abraham y Jerrold E. Marsden. *Foundations of mechanics*. Vol. 36. Benjamin/Cummings Publishing Company Reading, Massachusetts, 1978.
- [2] V. I. Arnold, V. V. Kozlov y A. I. Neishtadt. *Dynamical systems III*. Springer, 1988.
- [3] Uri M. Ascher y Linda R. Petzold. *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*. Vol. 61. Siam, 1998.
- [4] Anthony M. Bloch y Peter E. Crouch. «Newton's law and integrability of nonholonomic systems». En: *SIAM Journal on Control and Optimization* 36.6 (1998), págs. 2020-2039.
- [5] Anthony M. Bloch y Peter E. Crouch. «Nonholonomic control systems on Riemannian manifolds». En: *SIAM Journal on Control and Optimization* 33.1 (1995), págs. 126-148.
- [6] Anthony M. Bloch y col. *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer, 2015.
- [7] Richard L. Burden y J. Douglas Faires. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, 2010.
- [8] S. A. Chaplygin. «The motion of a heavy solid of revolution on a horizontal plane». En: *Researches of nonholonomic systems dynamics*. Moscow (1949), págs. 4-27.
- [9] Jorge Cortés y Sonia Martínez. «Non-holonomic integrators». En: *Nonlinearity* 14.5 (2001), pág. 1365.
- [10] Jorge Cortés y col. «Geometric description of vakonomic and nonholonomic dynamics. Comparison of solutions». En: *SIAM Journal on Control and Optimization* 41.5 (2002), págs. 1389-1412.
- [11] Gerardo De La Torre y Todd Murphey. «Surrogate Lagrangians for variational integrators: High order convergence with low order schemes». En: *arXiv preprint arXiv:1709.03883* (2017).
- [12] Manuel De León y Manuel Lainz Valcázar. «Singular Lagrangians and precontact Hamiltonian systems». En: *arXiv preprint arXiv:1904.11429* (2019).
- [13] Ari Stern Mathieu Desbrun. «Discrete geometric mechanics for variational time integrators». En: *Discrete Differential Geometry: An Applied Introduction* (2006), pág. 75.
- [14] L. Elsgoltz. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Editorial MIR Moscú, 1969.
- [15] Sebastián Ferraro, Fernando Jiménez y David M. de Diego. «New developments on the geometric nonholonomic integrator». En: *Nonlinearity* 28.4 (2015), pág. 871.

- [16] Bogdana Georgieva. «The Variational Principle of Herglotz and Related Results». En: *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization*. 2011, págs. 214-225.
- [17] Bogdana Georgieva, Ronald Guenther y Theodore Bodurov. «Generalized variational principle of Herglotz for several independent variables. First Noether-type theorem». En: *Journal of Mathematical Physics* 44.9 (2003), págs. 3911-3927.
- [18] Herbert Goldstein, Charles Poole y John Safko. *Classical mechanics*. 2002.
- [19] Ernst Hairer, Christian Lubich y Gerhard Wanner. *Geometric numerical integration: structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*. Vol. 31. Springer Science & Business Media, 2006.
- [20] Gustav Herglotz. *Vorlesungen über die Theorie der Berührungstransformationen*. Univ, 1930.
- [21] Heinrich Hertz. *The Principles of Mechanics Presented in a New Form*. Trad. por D. E. Jones y J. T. Walley. Macmillan y Company, Limited, 1899.
- [22] Claes Johnson. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Courier Corporation, 2012.
- [23] Jürgen Jost y Xianqing Li-Jost. *Calculus of variations*. Vol. 64. Cambridge University Press, 1998.
- [24] Oliver Junge, Jerrold E. Marsden y Sina Ober-Blöbaum. «Discrete mechanics and optimal control». En: *IFAC Proceedings Volumes* 38.1 (2005), págs. 538-543.
- [25] Couro Kane y col. «Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems». En: *International Journal for numerical methods in engineering* 49.10 (2000), págs. 1295-1325.
- [26] Marin Kobilarov, Keenan Crane y Mathieu Desbrun. «Lie group integrators for animation and control of vehicles». En: *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 28.2 (2009), págs. 1-14.
- [27] Marin Kobilarov y Gaurav Sukhatme. «Optimal control using nonholonomic integrators». En: *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE. 2007, págs. 1832-1837.
- [28] D. Korteweg. «Ueber eine ziemlich verbreitete unrichtige Behandlungsweise eines Problems der rollenden Bewegung und insbesondere über kleine rollende Schwingungen um eine Gleichgewichtslage». En: *Nieuw Archiefvoor Wiskunde* 4 (1899), págs. 130-155.
- [29] Olga Krupková. «Mechanical systems with nonholonomic constraints». En: *Journal of Mathematical Physics* 38.10 (1997), págs. 5098-5126.
- [30] Joseph Louis Lagrange. *Analytical Mechanics*. Trad. por Auguste Boissonnade y Victor N. Vagliente. Springer Science & Business Media, B.V., 1997.

- [31] Cornelius Lanczos. *The Variational Principles of Mechanics*. University of Toronto Press, 1949.
- [32] John Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2.^a ed. Vol. 218. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2012.
- [33] Manuel de León, Víctor Manuel Jiménez y Manuel Lainz Valcázar. «Contact Hamiltonian systems with nonholonomic constraints». En: *arXiv preprint arXiv:1911.05409* (2019).
- [34] Adrian Jose Lew. «Variational time integrators in computational solid mechanics». Tesis doct. California Institute of Technology, 2003.
- [35] AD Lewis. «Lagrangian mechanics, dynamics, and control». En: *Preprint available* 237 (2003).
- [36] Jerrold E. Marsden. *Lectures on geometric methods in mathematical physics*. SIAM, 1981.
- [37] Jerrold E. Marsden y Tudor S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. 1999.
- [38] Jerrold E. Marsden y Matthew West. «Discrete mechanics and variational integrators». En: *Acta Numerica* 10 (2001), págs. 357-514.
- [39] R. McLachlan y Matthew Perlmutter. «Integrators for nonholonomic mechanical systems». En: *Journal of nonlinear science* 16.4 (2006), págs. 283-328.
- [40] Robert I. McLachlan y G. Reinout W. Quispel. «Geometric integrators for ODEs». En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 39.19 (2006), pág. 5251.
- [41] Klas Modin y Olivier Verdier. «What makes nonholonomic integrators work?». En: *arXiv preprint arXiv:1707.04514* (2017).
- [42] Ju I. Neimark y Nikolai A. Fufaev. «Dynamics of Nonholonomic Systems». En: *Translations of Mathematical Monographs* 33 (1972).
- [43] P. C. Paris y Li Zhang. «A disk rolling on a horizontal surface without slip». En: *Mathematical and computer modelling* 36.7-8 (2002), págs. 855-860.
- [44] Ari Stern y Mathieu Desbrun. «Discrete geometric mechanics for variational time integrators». En: *ACM SIGGRAPH 2006 Courses*. 2006, págs. 75-80.
- [45] John C. Strikwerda. *Finite difference schemes and partial differential equations*. Vol. 88. Siam, 2004.
- [46] John L. Synge y Byron A. Griffith. *Principles of Mechanics*. 2.^a ed. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1949.
- [47] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Springer, 2011.
- [48] Mats Vermeeren. «Modified equations for variational integrators». En: *Numerische Mathematik* 137.4 (2017), págs. 1001-1037.

- [49] Mats Vermeeren, Alessandro Bravetti y Marcello Seri. «Contact variational integrators». En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 52.44 (2019), pág. 445206.
- [50] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Vol. 94. Springer Science & Business Media, 2013.
- [51] Matthew West. «Variational integrators». Tesis doct. California Institute of Technology, 2004.
- [52] Edmund Taylor Whittaker. *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*. CUP Archive, 1937.

Apéndice A

Integradores numéricos

Consideremos un problema de valor inicial (PVI) dado como

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (\text{A.1})$$

donde la función $y(t)$ es denominada solución de la ecuación (A.1), y cuyo valor en el tiempo $t = a$ está definido por $y(a)$. Resolver la ecuación (A.1) significa justamente encontrar la función $y(t)$ que satisfaga la ecuación

$$\dot{y} = f(t, y) \quad \text{en} \quad a < t \leq b \quad \text{y condición inicial} \quad y(a) = y_a. \quad (\text{A.2})$$

A continuación veremos que para resolver numéricamente este tipo de problemas—es decir, integrarlo numéricamente—requeriremos que dicho problema esté *bien definido*. Para ello, revisamos algunas definiciones.

Definición A.0.1. Una función $f(t, y)$ se dice que satisface la condición de Lipschitz en la variable y sobre un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ si existe una constante $L > 0$ tal que se cumple

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad (\text{A.3})$$

para (t, y_1) y (t, y_2) en D . La constante L se denomina constante de Lipschitz para f .

Definición A.0.2. Sea f una función definida en un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in X$. Entonces f es continua en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (\text{A.4})$$

La función f es continua en todo el conjunto X si lo es en todos los puntos de X .

Teorema 5. Considere $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$ y que $f(t, y)$ es continua en D . Si f satisface la condición de Lipschitz sobre D en la variable y , entonces el PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad (\text{A.5})$$

tiene una única solución $y(t)$ para $a \leq t \leq b$.

Un **integrador numérico** para aproximar la solución del PVI (A.1) es una función $\Phi_h(y)$ que produce valores

$$y_0, y_1, y_2, \dots,$$

donde $y_i \approx y(t_i)$, para $t_i \in [a, b]$. Es decir, los y_i se aproximan a los valores de la función solución del problema (A.1).

Como el trabajo de los integradores numéricos es *aproximar* la solución real, necesitamos garantizar que pequeñas perturbaciones en la definición del problema y pequeños cambios en la especificación del valor inicial solo tengan como consecuencia pequeños cambios en la aproximación de la solución. Es decir, que el error de la aproximación con respecto a la solución real corresponda al error cometido en la definición del problema y las mediciones obtenidas para especificar un valor inicial.

Entonces, para la derivación de integradores numéricos necesitamos algunas definiciones y enunciados sobre la definición de un PVI dado.

Definición A.0.3. *El problema (A.1) se denomina **PVI bien definido** si:*

- *Existe una única solución $y(t)$, y*
- *Existen constantes $\epsilon_0 > 0$ y $k > 0$ tal que para cualquier ϵ , con $0 < \epsilon < \epsilon_0$, y una función $\delta(t)$ continua con $|\delta(t)| < \epsilon$ para todo $t \in [a, b]$, y δ_0 cumpliendo $|\delta_0| < \epsilon$, el problema de valor inicial*

$$\dot{z} = f(t, z) + \delta(t), \quad a \leq t \leq b, \quad z(a) = \alpha + \delta_0, \quad (\text{A.6})$$

tiene una única solución $z(t)$ que satisface

$$|z(t) - y(t)| < k\epsilon \quad \text{para todo } t \in [a, b]. \quad (\text{A.7})$$

El problema descrito por la ecuación (A.6) se denomina *problema perturbado* asociado al PVI (A.1), en donde se asume la posibilidad de que errores sean introducidos a la definición de la ecuación diferencial y también un error δ_0 en la condición inicial [7].

Resolver un problema perturbado es concerniente a los esquemas numéricos ya que se busca que el comportamiento cualitativo de la solución no se vea afectado por la adición o cambios de términos de menor orden o por pequeños cambios en los coeficientes, que ocurre con la representación en precisión finita y por truncamiento [45].

Teorema 6. *Suponga $f \in C^n[a, b]$, es decir f es derivable n veces en el intervalo $[a, b]$ y con derivada continua, además $f^{(n+1)}$ existe en $[a, b]$, y $x_0 \in [a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$, existe un número $\xi(x)$ entre x_0 y x con*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad (\text{A.8})$$

donde

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \quad (\text{A.9})$$

$P_n(x)$ se llama polinomio de Taylor para f alrededor de x_0 y $R_n(x)$ se llama término de residuo (o error por truncamiento) asociado a $P_n(x)$. La serie infinita se obtiene tomando el límite de $P_n(x)$ con $n \rightarrow \infty$ y se llama serie de Taylor para f alrededor de x_0 . El error por truncamiento en el polinomio de Taylor se refiere al error producido al utilizar una sumatoria truncada para aproximar la sumatoria de la serie infinita [7].

A.0.1. Derivación de un integrador numérico

Uno de los esquemas numéricos de derivación más directa es el método de Euler, que para el efecto utiliza el teorema de Taylor [7].

Suponga que se busca resolver el problema (A.1) y que este está bien definido, en el sentido de la Definición A.0.3. Primeramente establecemos una partición del intervalo $[a, b]$ seleccionando un número natural N y estableciendo

$$t_i := a + ih, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, N, \quad (\text{A.10})$$

donde $h := t_{i+1} - t_i = (b - a)/N$ se llama *tamaño de paso*.

Como el problema está bien definido, tenemos una única solución $y(t)$, la cual suponemos que es derivable dos veces en $[a, b]$ con derivadas continuas, entonces para $i = 0, 1, \dots, N$, por el Teorema 6 existe un $\xi(t_{i+1}) \in (t_i, t_{i+1})$ tal que se cumple

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2!}y''(\xi(t_{i+1})), \quad (\text{A.11})$$

utilizando la definición de tamaño de paso h y la ecuación diferencial del problema (A.1),

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi(t_{i+1})). \quad (\text{A.12})$$

El método de Euler establece aproximaciones y_{i+1} para $i = 0, 1, \dots, N - 1$ eliminando el término de residuo de la ecuación (A.12), por lo que el método resultante es

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha, \\ y_{i+1} &= y_i + hf(t_i, y_i), \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Los métodos numéricos que solo requieren de los valores de un paso anterior t_i, y_i para aproximar y_{i+1} se denominan **métodos de un paso**.

Uno de los criterios para medir la precisión de un esquema numérico consiste en medir la diferencia entre la aproximación dada por el esquema y la solución de la ecuación diferencial en el paso que está siendo aproximado [7]. En otras palabras, se mide cuánto falla la solución del problema de valor inicial en satisfacer el método de diferencias que se usa para obtener las aproximaciones. Esta diferencia se conoce como *error por truncamiento local*.

Definición A.0.4. *El método de diferencias*

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha \\ y_{i+1} &= y_i + h\phi(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \tag{A.14}$$

tiene error por truncamiento local

$$\begin{aligned} \tau_{i+1}(h) &= \frac{y(t_{i+1}) - (y(t_i) + h\phi(t_i, y(t_i)))}{h} \\ &= \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - \phi(t_i, y(t_i)), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \tag{A.15}$$

para $t_i, t_{i+1} \in [a, b]$.

Nótese que este error es *local* ya que mide la precisión del método en el paso específico para obtener y_{i+1} asumiendo que el valor dado por el esquema en el paso anterior fue exacto.

Por ejemplo, el método de Euler explícito tiene error por truncamiento local en el paso de i a $i+1$,

$$\begin{aligned} \tau_{i+1}(h) &= \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} - f(t_i, y(t_i)) \\ &= \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i) - hy'(t_i)}{h} \\ &= \frac{h}{2}y''(\xi(t_{i+1})), \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \tag{A.16}$$

Definición A.0.5. *Un método de diferencias de un paso con error por truncamiento $\tau_i(h)$ en el paso i se denomina **consistente** con la ecuación diferencial que aproxima si*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq N} |\tau_i(h)| = 0. \tag{A.17}$$

Definición A.0.6. *Un método de diferencias de un paso se denomina **convergente** con respecto a la ecuación diferencial que aproxima si*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq N} |y_i - y(t_i)| = 0, \tag{A.18}$$

donde $y(t_i)$ denota el valor exacto de la solución de la ecuación diferencial e y_i es la aproximación obtenida por el método de diferencias en el paso i .

Definición A.0.7. *Considere un método de diferencias de un paso de la forma*

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha, \\ y_{i+1} &= y_i + h\phi(t_i, y_i, h), \end{aligned} \tag{A.19}$$

*que aproxime la solución del PVI (A.1). Este método se denomina **estable** si existe un número $h_0 > 0$ tal que $\phi(t, y, h)$ es continua y satisface la condición de Lipschitz en la variable y con constante de Lipschitz L en el conjunto*

$$D = \{(t, y, h) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty, 0 \leq h \leq h_0\}. \tag{A.20}$$

La estabilidad de un esquema numérico es algo análogo al concepto de buena definición de un PVI, se busca determinar si pequeños cambios en las condiciones iniciales para el método numérico producen correspondientes pequeños cambios en aproximaciones subsecuentes [7].

Teorema 7. Teorema de Equivalencia de Lax-Richtmyer. *Un esquema de diferencias finitas consistente para una ecuación diferencial parcial para el cual el problema del valor inicial está bien definido es convergente si y solo si es estable [45].*

Apéndice B

Equivalencia de perspectivas del Espacio Tangente

En este apéndice ofrecemos, para comodidad del lector, una prueba del Teorema 1, que da una equivalencia entre dos perspectivas del concepto de espacio tangente. Además, como ingrediente de la propia prueba, introducimos una forma estándar de obtener una base de dicho espacio, concepto que fue utilizado en la discusión del fibrado tangente. Todo lo que discutiremos aquí es contenido estándar de cualquier texto sobre variedades diferenciables, como los trabajos de Lee [32], Warner [50] y Tu [47], los cuales el lector puede consultar si desea profundizar en estos temas.

La estrategia consiste en establecer primero ciertas propiedades del espacio $\mathcal{D}_p(M)$, y finalmente establecer una biyección de este espacio con el espacio $\mathcal{V}_p(M)$.

Proposición 2. *Una derivación $D \in \mathcal{D}_p(M)$ satisface*

1. *Para cualquier función constante c , $D(c) = 0$.*
2. *Para dos funciones $f, g \in C^\infty(M)$ que coinciden en un entorno de p , se tiene*

$$D(f) = D(g).$$

Además, existe un isomorfismo $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ dado por $v \mapsto D_v$, donde $D_v: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por la derivada direccional, es decir,

$$D_v(f) = \partial_v(f)(p).$$

Demostración. En efecto

1. Primero, para $c = 1$, observamos que

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1) = 2D(1) \implies D(1) = 0.$$

Ahora, para un c arbitrario, notamos que $D(c) = cD(1) = 0$.

2. Notemos que por linealidad basta mostrar que si $h \in C^\infty(M)$ es tal que se anula en un entorno W de p , entonces $D(h) = 0$. Para ello, sea $\eta: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que es distinta de cero solo en un entorno abierto W' de p tal que su clausura, $\overline{W'}$, es subconjunto de W . De esa forma, tenemos que $h\eta \equiv 0$, y por lo tanto

$$0 = D(h\eta) = D(h)\eta(p) + h(p)D(\eta) = D(h)\eta(p) \implies D(h) = 0.$$

Para probar la afirmación final, primero notemos que dado $v \in \mathbb{R}^n$, el mapa

$$D_v: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}; f \mapsto \partial_v(f)(p),$$

es efectivamente una derivación en p , pues la derivada direccional es lineal y satisface la regla de Leibniz. Observemos entonces que la asignación $v \mapsto D_v$ es lineal, pues

$$D_{(au+bv)}(f) = \partial_{(au+bv)}f(p) = a\partial_u f(p) + b\partial_v f(p) = (aD_u + bD_v)(f),$$

y siendo f arbitrario, concluimos la linealidad.

Mostremos que el mapa $v \mapsto D_v$ es inyectivo. En efecto, si D_v es el mapa nulo, entonces para cualquier función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tendremos

$$0 = \partial_v(f)(p) = J_f(p)(v),$$

siendo $J_f(p)$ la matriz jacobiana de f . Como la igualdad es válida para cualquier f , concluimos que $v = 0$.

Finalmente, debemos mostrar que el mapa $v \mapsto D_v$ es sobreyectivo. Para ello, sea D un elemento arbitrario de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$, y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable cualquiera. Por el Teorema de Taylor con resto, tenemos, en algún entorno de p :

$$f(x) = f(p) + \sum_i (x^i - p^i)g_i(x),$$

para ciertas funciones diferenciables $g_i(x)$ tales que $g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$.

Aplicando D a ambos miembros de esta igualdad, y usando el resultado del ítem 1), obtenemos

$$Df = \sum_i Dx^i g_i(p) = \sum_i Dx^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Por otro lado, observamos que tomando $v = \sum_i Dx^i e_i$, siendo e_i el i -ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$, obtenemos

$$D_v(f) = \partial_v f(p) = \sum_i Dx^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

en donde en la segunda igualdad utilizamos el hecho de que la derivada direccional de f en dirección v es el producto escalar del gradiente de f con v . Como f es arbitrario concluimos que $D_v = D$, lo que concluye la prueba. $\square$

Dadas dos variedades diferenciables, M y N , consideremos un mapa diferenciable $F: M \rightarrow N$, esto es, un mapa tal que $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable para cualesquiera cartas φ y ψ de M y N , respectivamente, que permitan la composición indicada. El *diferencial* de F en un punto $p \in M$ se define como el mapa lineal

$$dF|_p: \mathcal{D}_p(M) \rightarrow \mathcal{D}_{F(p)}(N); D \mapsto dF|_p(D) \text{ tal que } dF|_p(D)(f) = D(f \circ F),$$

para cualquier $f \in C^\infty(N)$.

Tanto el hecho de que $dF|_p(D)$ es una derivación en $F(p)$ de $C^\infty(N)$, como el hecho de que dF_p es lineal, siguen del hecho que D es una derivación (y por lo tanto lineal).

Una de las propiedades importantes del diferencial es que obedece la regla de la cadena. Precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3. Sean $F: M \rightarrow N$ y $G: N \rightarrow P$ mapas diferenciables entre variedades. Dados $p \in M$ y $q = F(p) \in N$, vale la igualdad

$$d(G \circ F)|_p = dG|_q \circ dF|_p.$$

Demostración. Observemos antes que nada que el mapa $G \circ F$ es diferenciable. La validez de la regla de la cadena es una consecuencia directa de la definición, en efecto:

$$\begin{aligned} [dG|_q \circ dF|_p](D)(f) &= dG|_q(dF|_p(D))(f) = dF|_p(D)(f \circ G) \\ &= D(f \circ G \circ F) = d(G \circ F)|_p(D)(f). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Como $f \in C^\infty(P)$ y $D \in \mathcal{D}_p(M)$ son arbitrarios, se concluye la igualdad afirmada. $\square$

Un corolario importante de la regla de la cadena es que el diferencial de un difeomorfismo es un isomorfismo de espacios vectoriales. Concretamente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4. Sea $F: M \rightarrow N$ un difeomorfismo (biyección diferenciable con inversa $G: N \rightarrow M$ diferenciable). Entonces, para cualquier $p \in M$, el mapa

$$dF|_p: \mathcal{D}_p(M) \rightarrow \mathcal{D}_{F(p)}(N),$$

es un isomorfismo lineal.

Demostración. En efecto, observemos primero que el diferencial del mapa identidad es el mapa identidad, esto es, si $I: M \rightarrow M$ es la identidad, entonces $dI_p: \mathcal{D}_p(M) \rightarrow \mathcal{D}_p(M)$ es la identidad. Con esa observación, notamos ahora que, gracias a la regla de la cadena, valen

$$\begin{aligned} I_p &= d(G \circ F)|_p = dG|_{F(p)} \circ dF|_p \\ I_{F(p)} &= d(F \circ G)|_{F(p)} = dF|_p \circ dG|_{F(p)}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Estas dos igualdades implican que los mapas lineales $dF|_p$ y $dG|_{F(p)}$ son inversas una de la otra. En particular, $dF|_p$ es un isomorfismo lineal. $\square$

Un caso particular importante de la Proposición 4 es que las cartas en una variedad diferenciable M establecen, mediante su diferencial, un isomorfismo entre los espacios $\mathcal{D}_p(M)$ y $\mathbb{R}^n$. Pero antes necesitamos establecer el carácter local del espacio $\mathcal{D}_p(M)$, esto es, que sólo depende de un entorno del punto p , como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 5. *Sea M una variedad diferenciable y $U \subset M$ un abierto. Dado $p \in U$, los espacios vectoriales $\mathcal{D}_p(U)$ y $\mathcal{D}_p(M)$ son isomorfos.*

Demostración. La idea esencialmente consiste en notar que las funciones $f \in C^\infty(M)$ pueden restringirse a funciones $f|_U \in C^\infty(U)$, y que las funciones $g \in C^\infty(U)$ pueden extenderse a funciones $\tilde{g} \in C^\infty(M)$, y observar que las derivaciones tienen carácter local, como lo muestra el ítem 2) de la Proposición 2. Pasemos a los detalles.

Sea $\iota: U \rightarrow M$ el mapa de inclusión. El objetivo es establecer que su diferencial $d\iota|_p: \mathcal{D}_p(U) \rightarrow \mathcal{D}_p(M)$ es un isomorfismo, para cualquier $p \in U$.

Para probar inyectividad, considere un elemento $D_U \in \mathcal{D}_p(U)$ tal que $d\iota_p(D_U) = 0$. Esto significa que para cualquier $f \in C^\infty(M)$, se tiene

$$d\iota|_p(D_U)(f) = 0.$$

Sea entonces $g \in C^\infty(U)$, y consideremos una extensión $\tilde{g} \in C^\infty(M)$. Notemos que la extensión cumple $\tilde{g} \circ \iota = \tilde{g}|_U = g$, y por lo tanto

$$D_U(g) = D_U(\tilde{g} \circ \iota) = d\iota|_p(D_U)(\tilde{g}) = 0.$$

Como $g \in C^\infty(U)$ es arbitrario, concluimos que $D_U = 0$.

Para probar sobreyectividad, sea $D \in \mathcal{D}_p(M)$. Consideremos el mapa $D_U: C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$D_U(g) = D(\tilde{g}),$$

siendo $\tilde{g} \in C^\infty(M)$ una extensión de g (i.e., $g = \tilde{g} \circ \iota$). Si $\hat{g}$ fuese otra extensión de g , notamos que $\hat{g}$ y $\tilde{g}$ coinciden en un entorno de p , y por lo tanto $D(\tilde{g}) = D(\hat{g})$, según el ítem 2) de la Proposición 2. Así, el mapa D_U está bien definido. Además, es simple ver que de hecho es una derivación de $C^\infty(U)$. Afirmamos que $d\iota|_p(D_U) = D$. En efecto, dado cualquier $f \in C^\infty(M)$, tenemos:

$$d\iota|_p(D_U)(f) = D_U(f \circ \iota) = D(f),$$

pues f es una extensión de $f \circ \iota$. Esto concluye la demostración. $\square$

Ahora tenemos todas las herramientas para concluir que $\mathcal{D}_p(M)$ es isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Concretamente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 6. *Dada una variedad diferenciable M de dimensión n , para cada $p \in M$, $\mathcal{D}_p(M)$ es un espacio vectorial de dimensión n . Más aún, si $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ es una carta*

centrada en p (i.e., $\varphi(p) = 0$), y $\{e_i\}$, con $i = 1, \dots, n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces el conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p := d(\varphi^{-1})|_0 e_i \right\},$$

es una base de $\mathcal{D}_p(M)$.

Demostración. Recordemos que $\varphi: U \rightarrow V$ es un difeomorfismo sobre su imagen $V = \varphi(U)$, y por lo tanto, según la Proposición 4, $d\varphi|_p: \mathcal{D}_p(U) \rightarrow \mathcal{D}_0(V)$ es un isomorfismo. Por otro lado, según la Proposición 5, $\mathcal{D}_p(U)$ es isomorfo a $\mathcal{D}_p(M)$, y $\mathcal{D}_0(V)$ es isomorfo a $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, el cual es finalmente isomorfo a $\mathbb{R}^n$, de acuerdo con la Proposición 2.

Usando estas identificaciones, podemos considerar el isomorfismo $d\varphi|_p: \mathcal{D}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}^n$, cuya inversa es $d(\varphi^{-1})|_0$. Como los isomorfismos lineales transforman bases en bases, concluimos que el conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p := d(\varphi^{-1})|_0 e_i \right\},$$

es una base de $\mathcal{D}_p(M)$, como queríamos. □

Finamente, definamos un mapa $\mathcal{V}_p(M) \rightarrow \mathcal{D}_p(M)$, mediante

$$[\gamma] \mapsto D_\gamma; \text{ tal que } D_\gamma(f) = (f \circ \gamma)'(0).$$

Antes que nada, observemos que la condición $\beta \sim \gamma$ es precisamente que $\beta(0) = \gamma(0) = p$ y $(f \circ \beta)'(0) = (f \circ \gamma)'(0)$, para cualquier $f \in C^\infty(M)$. Esto garantiza que el mapa $[\gamma] \mapsto D_\gamma$ está bien definido. Además, D_γ es una derivación en p de $C^\infty(M)$, pues es claramente lineal, y además

$$\begin{aligned} D_\gamma(fg) &= [(fg) \circ \gamma]'(0) = [(f \circ \gamma)(g \circ \gamma)]'(0) \\ &= (f \circ \gamma)'(0)g(p) + f(p)(g \circ \gamma)'(0) \\ &= D_\gamma(f)g(p) + f(p)D_\gamma(g). \end{aligned} \tag{B.3}$$

El mapa $[\gamma] \mapsto D_\gamma$ es ciertamente inyectivo, pues $[\gamma] \neq [\beta]$ implica que

$$D_\gamma(f) = (f \circ \gamma)'(0) \neq (f \circ \beta)'(0) = D_\beta(f),$$

para alguna función $f \in C^\infty(M)$, y por lo tanto $D_\gamma \neq D_\beta$.

Para concluir sobreyectividad, sea $D \in \mathcal{D}_p(M)$, y $\varphi = (x^1, \dots, x^n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta centrada en p . Entonces podemos escribir $D = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$, para algunos escalares a_i . Consideremos el vector $v = \sum_i a_i e_i \in \mathbb{R}^n$, y sea $\alpha(t) = tv$. Definamos entonces $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\alpha(t))$. Afirmamos que $D_\gamma = D$. Para ello, observemos primero que $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U \subset M$ con $\gamma(0) = p$ implica $d\gamma|_0: \mathcal{D}_0(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}_p(M)$. Aquí, el isomorfismo $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}$ se realiza mediante el mapa dado en la Proposición 2, esto es, $e_1 \mapsto \partial_t$. Así, tenemos

$$(d\gamma|_0(e_1))(f) = e_1(f \circ \beta) = (f \circ \beta)'(0).$$

Por tanto, obtenemos

$$D_\gamma(f) = (f \circ \gamma)'(0) = (d\gamma|_0(e_1))(f).$$

Por otro lado, $\gamma = \varphi^{-1} \circ \alpha$, y la regla de la cadena nos da $d\gamma|_0(e_1) = d(\varphi^{-1})|_0(d\alpha|_0(e_1))$. Notemos que, bajo el isomorfismo $v \mapsto \partial_v$, de la Proposición 2, tenemos $d\alpha|_0(e_1) = \alpha'(0) = v$, y por lo tanto

$$D_\gamma(f) = (d\gamma|_0(e_1))(f) = (d(\varphi)^{-1}|_0(v))(f) = \left(\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) (f) = D(f).$$

Así, $D_\gamma = D$, como afirmamos.

De esta forma, al tener una biyección entre $\mathcal{V}_p(M)$ y $\mathcal{D}_p(M)$, podemos trasladar toda la estructura de espacio vectorial de dimensión finita desde $\mathcal{D}_p(M)$ para $\mathcal{V}_p(M)$, o bien usar los objetos geométricos de $\mathcal{V}_p(M)$ para interpretar los objetos algebraicos de $\mathcal{D}_p(M)$. La síntesis de toda esta discusión, es identificar estos conjuntos, y denotarlos de forma unificada mediante $T_p M$, al cual llamamos el espacio tangente a M en p .